4　線形空間

4.1　幾何ベクトルと数ベクトルの対応

ここまでに何度も現れた行ベクトルや列ベクトルは、n 個の数を成分にもつような対象であり、こららには「和」と「定数倍」および「内積」という演算が定義されていた。以後、これらを「数ベクトル」と呼ぶことにしよう。さて一方で、よく知られているようにベクトルとは空間や平面に住む、大きさと方向をもつ矢印であり、必ずしも「成分」を用いずに考えることができる。この矢印を、**幾何ベクトル**と呼ぼう。この節では、数ベクトルと幾何ベクトルの対応関係を追求することにより、ベクトルとは一般にどのような数学的対象なのかを考える。

まず、幾何ベクトルには数ベクトルと同様に、「和」と「定数倍」、さらに「内積」が定義されていることを見よう。

(i) **和：** 2 本の幾何ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和は図 4.1 左のように、平行四辺形の対角線方向を向いたベクトルとして定義される。ベクトルの「差」は $\vec{a}$ と、次で定義する $(-\vec{b})$ の和として、図右のように自然に定義される。

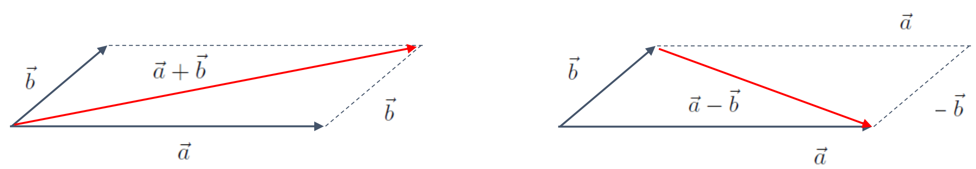

図 4.1:

(ii) **定数倍：** ある幾何ベクトル $\vec{a}$ を定数 k 倍したベクトルは、元のベクトルの長さを k 倍したベクトルとして図 4.2 のように定義される。k が負の場合は、図下のように $|k|$ 倍するとともに向きが逆になる。

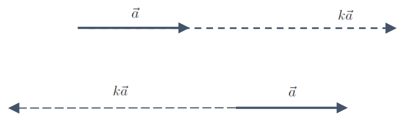

図 4.2:

(iii) **内積：** ２本の幾何ベクトルの内積とは、それらの**直交性**を測る指標であり、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta \tag{4.1.1}$$

のように定義される。ここで $\|\vec{a}\|$ は $\vec{a}$ の長さであり、θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度である。特に、あるベクトルの自分自身との内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \iff \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \tag{4.1.2}$$

となる。また、図 4.3 のような３角形を考えて余弦定理を用いると

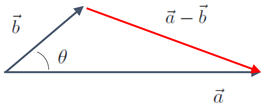

図 4.3:

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \tag{4.1.3}$$

であるから、

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}-\vec{b}\|^2\right) \tag{4.1.4}$$

のように、内積は２本のベクトルのなす角を使わずに表現することができる。(4.1.4) を内積の幾何表示と呼ぶ。

数ベクトルとの対応：　n 次元の数ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4.1.5}$$

と幾何ベクトルの対応づけを考えよう。

例として図 4.4 のような、３次元空間における任意の幾何ベクトル $\vec{a}$ と数ベクトルの対応関係を与えよう。

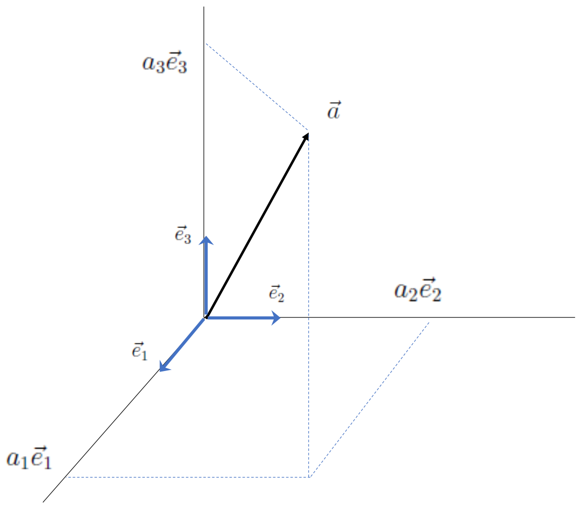

図 4.4:

図から分かるように、$\vec{a}$ は各方向の単位ベクトル $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ の線形結合で、

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \tag{4.1.6}$$

のように書けるから、

$$\vec{a} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{4.1.7}$$

と１対１に対応づけることにする。この対応関係を

$$\varphi(\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{4.1.8}$$

と書けば、幾何ベクトルと数ベクトルの「和」および「定数倍」も対応していることは

$$\varphi(\vec{a}+\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix} \tag{4.1.9}$$

などから明らかであり、さらに、$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ だから、

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2-(a_3-b_3)^2\right) \\ &= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

のように内積の成分表示、つまり数ベクトルの情報だけによる内積の表現がわかる。

4.2　一般の線形空間

幾何ベクトルと数ベクトルは共に同じ演算をもち、1 対 1 の対応関係があることがわかった。ここでは、ベクトルを「和」と「定数倍」について閉じた集合の要素（元）として定義してみることにしよう[15]。

定義（ベクトル空間）：

ある集合 V に「和」と「定数倍 (スカラー倍)」が定められていて、$u,\, v \in V$ に対して $u+v \in V,\ ku \in V$ (k : 定数) が成り立つとき、V を線形（ベクトル）空間という。

この定義に従えば、ベクトル空間の例には様々なものがあることがわかる。いくつかの例を提示してみよう。

例：　幾何ベクトルの集合がベクトル空間をなすのは明らか。

例：　2 次以下の実係数多項式の集合 $\mathbb{R}[x]_2$ はベクトル空間である。例えば、

$$f(x) = 2+3x-5x^2,\ g(x) = -1+2x,\ \Rightarrow f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \tag{4.2.1}$$

に対して、

$$f(x)+g(x) = 1+5x-5x^2 \in \mathbb{R}[x]_2, \tag{4.2.2}$$

$$(-2)f(x) = -4-6x+10x^2 \in \mathbb{R}[x]_2 \tag{4.2.3}$$

などが成立するので。

例：　実係数多項式の集合 $\mathbb{R}[x]$ も明らかにベクトル空間である。

最後の例において、$\mathbb{R}[x]_2$ は $\mathbb{R}[x]$ の部分空間である、つまり部分集合それ自体がベクトル空間になっている。ここで部分集合は必ずそれ自体がベクトル空間になっているかどうかを考察しておこう。実はそんなことは全くないのである。

例えば 3 次元の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合として

$$V_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \end{array} \right\} \tag{4.2.4}$$

[15] 内積についての考察は、後ほど与えることにする。

を考えよう。これは幾何学的に考えれば 3 次元空間内の、原点を通る 2 枚の平面の共通部分、つまりある直線である。このとき、

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in V_1 \tag{4.2.5}$$

であれば $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in V_1$ および $k\boldsymbol{x} \in V_1$ は容易に示されるから、V_1 はベクトル空間になっている。

一方、

$$V_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - 2y + z = 3 \end{array} \right\} \tag{4.2.6}$$

に対しては $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V_2$ に対して $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2,\ k\boldsymbol{x}_1 \notin V_2$ であり、V_2 は $\mathbb{R}^3$ の部分集合ではあるが、ベクトル空間ではない[16]。

演習課題 12

(12-3) 次の行列式の値が 0 になるための x に対する条件をそれぞれ求めよ。

$$(1)\ \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 3 & -2 & -1 \\ x^2 & 9 & 4 & 1 \\ x^3 & 27 & -8 & -1 \end{vmatrix}$$

(12-4) $A,\ B$ を n 次行列とするとき、$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B||A - B|$ を示せ。

[16] V_2 は 3 次元空間内の原点を通らない 2 枚の平面の共通部分である。

4.3　線形空間の基底

　前節では、幾何ベクトルと数ベクトルの対応関係を考えたが、より一般にベクトル空間の元と数ベクトルの対応を考えよう。例として、2 次以下の多項式の集合 $\mathbb{R}[x]_2$ の任意の元 ax^2+bx+c の数ベクトルへの対応を、

$$\varphi(ax^2+bx+c)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \tag{4.3.1}$$

と定めると、$f_1(x),\,f_2(x)\in\mathbb{R}[x]_2$ として、明らかに

$$\varphi(k_1f_1(x)+k_2f_2(x))=k_1\varphi(f_1(x))+k_2\varphi(f_2(x)) \tag{4.3.2}$$

が成り立つから、写像 $\varphi:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}^3$ はベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ の線形性を保つ。つまり、これらはベクトル空間として等価なものと考えられる。

　ところで、

$$x^2=(x-1)^2+2x-1=(x-1)^2+2(x-1)+1 \tag{4.3.3}$$

$$x=(x-1)+1 \tag{4.3.4}$$

であるから、

$$ax^2+bx+c=a(x-1)^2+(2a+b)(x-1)+(a+b+c)(x-1)^0 \tag{4.3.5}$$

と書き直すことができて、新たな写像 $\varphi':\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}^3$ を

$$\varphi'(ax^2+bx+c)=\begin{pmatrix}a\\2a+b\\a+b+c\end{pmatrix} \tag{4.3.6}$$

と対応づけても、同様に線形性は保たれる。したがって、 $\mathbb{R}[x]_2$ から $\mathbb{R}^3$ への対応づけはただ一つではない。

　さて、それでは一般に $f_1(x),\,f_2(x),\,f_3(x)$ を 2 次以下の多項式として、

$$ax^2+bx+c=pf_1(x)+qf_2(x)+rf_3(x) \tag{4.3.7}$$

と書けたときに、

$$\varphi''(ax^2+bx+c)=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix} \tag{4.3.8}$$

のような対応づけは可能だろうか？これを見るために、

$$f_1(x)=x^2,\ f_2(x)=x+1,\ f_3(x)=x^2+x+1 \tag{4.3.9}$$

としてみる。するとこのとき、

$$pf_1(x)+qf_2(x)+rf_3(x)=\underbrace{(p+r)}_{=a}x^2+\underbrace{(q+r)}_{=b}x+\underbrace{(q+r)}_{=c} \tag{4.3.10}$$

であるから、$b=c$ であるような多項式しか表せないことがわかる。なぜなら、この場合の 2 次以下の多項式には $f_3=f_1+f_2$ のような特別な関係があるから。したがって、$\mathbb{R}[x]_2$ の任意の元を表現するには、$f_1(x),\,f_2(x),\,f_3(x)$ の選び方に注意する必要があることがわかった。

ここで、言葉の定義をしよう。

定義（1 次独立・従属）：

線形空間 V の元 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に対して、$k_j\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ に対する方程式

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n = 0 \tag{4.3.11}$$

を考える。

- 解が $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ だけのとき、$\boldsymbol{v}_j$ は **1 次独立**
- 少なくとも一つは 0 でない k_j があるとき、$\boldsymbol{v}_j$ は **1 次従属**

という[a]。

[a]それぞれ線形独立・線形従属ともいう。

先ほどの例では、$\boldsymbol{v}_1 \leftrightarrow f_1$ などと書かれていたが、$f_1 + f_2 - f_3 = 0$ つまり $(k_1, k_2, k_3) = (1, 1, -1)$ という解があったので、f_j は 1 次従属であったことがわかる。

線形空間 V の任意の元（ベクトル）を表現するには、1 次独立な V の元の組が必要なことをみよう。そのために、さらに定義を与える。

定義（次元）：

ベクトル空間 V の、異なる n 個の元の集合 $\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1,\ldots,n}$ が条件、

(1) $\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1,\ldots,n}$ は 1 次独立

(2) 任意の $\boldsymbol{u} \in V$ を付け加えた集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{u}\}$ は 1 次従属、したがって n 個を超える 1 次独立な元の集合は存在しない

を満たすとき、n を V の**次元**と呼び、$\dim V = n$ と書く。

定義（基底）：

$\dim V = n$ とする。$\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1,\ldots,n}$ が V の基底であるとは、以下が成立することである。

(1) $\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1,\ldots,n}$ は 1 次独立。

(2) V の任意の元 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と線形結合で表せるような $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ が存在する。

さて、V の 1 組の基底を決めると、写像 φ によって、V の任意の元 $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ は

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n \tag{4.3.12}$$

と数ベクトルへの対応がつけられる。また、逆に 1 組の基底 $\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1,\ldots,n}$ が与えられたとき、V を $\{\boldsymbol{v}_j\}_{,j=1,\ldots,n}$ の張る線形空間、あるいは場合に応じて線形部分空間と呼ぶ。

例：　$\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分空間

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{r} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 3x + y + 2z + w = 0 \end{array} \right\} \tag{4.3.13}$$

の基底を求めよう。

2 つの条件式を連立 1 次方程式とみて x, y について解けば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -11 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7/5 & 11/5 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 7/5 & 11/5 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.14}$$

となるから、s と t を任意の実数として例えば $z = -5s$ および $w = 5t$ と置けば

$$V_1 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2t \\ 7s - 11t \\ -5s \\ 5t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{4.3.15}$$

となり、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{4.3.16}$$

がこの 2 次元部分空間の基底である[17]。参考までに、もとの $\mathbb{R}^4$ の基底は、例えば

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.3.17}$$

などと取ることができる[18]。

4.4　1 次独立性と行列式

n 次元のベクトル空間における n 個の元の集合 $\{\boldsymbol{a}_j\}_{j=1,2,\ldots,n}$ が、1 次独立かどうか判定する方法について考察しよう。各ベクトルの成分を

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.4.1}$$

[17] この部分空間は 4 次元空間内の原点を含む 2 次元平面である。
[18] もちろん基底の取り方は無数にあるので、これは一例に過ぎない。

のように置き、これを列ベクトルとする行列を A とする。このとき 1 次独立条件は、定義より $k_j\ (j = 1,\dots,n)$ に対する連立 1 次方程式

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{4.4.2}$$

において、解が $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ しかないというものである。これは A の行列式 $|A| \neq 0$ という条件に等しい。なぜならば、このときには A の逆行列 A^{-1} が存在し、(4.4.2) に左から逆行列をかければ、解は $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ と求まるから。逆に $|A| = 0$ ならば、連立 1 次方程式の解法で見てきたように $k_j \neq 0$ である解が存在するので、$\{\boldsymbol{a}_j\}_{j=1,2,\dots,n}$ は 1 次従属である。

したがって、正方行列 A の行列式とは、A の各列ベクトルの 1 次独立性を判定する指標であることがわかった。さらに $|{}^t\!A| = |A|$ より、$|A| \neq 0$ は各行ベクトルが 1 次独立であることも意味している。

演習課題 13

(13-2) 次の 2 次以下の多項式 $f(x) = x^2 + 3x - 2,\ g(x) = x^2 + 2x - 2,\ h(x) = -x^2 - 4x + 3$ の 1 次独立性を判定せよ。

(13-3) 最高次が x^n であるような x の実係数多項式全体の集合を P_n とする。

(a) $f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x - 1, \cdots, f_n(x) = (x-1)^n$ は P_n の基底であることを示せ。

(b) 任意の $p(x) \in P_n$ は $p(x) = p(1)f_0(x) + p'(1)f_1(x) + \frac{1}{2!}p''(1)f_2(x) + \cdots + \frac{1}{n!}p^{(n)}(1)f_n(x)$ と表せることを示せ。

4.5 計量線形空間

2 本の n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ には、内積

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{4.5.1}$$

を定義することができた。これらの数ベクトルの成分が実数だとすれば、この内積には

(R1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(R2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ （分配則）

(R3) $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$、 ただし $k\in\mathbb{R}$（スカラー倍）

(R4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geq 0$、等号成立は $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のときのみ

のような性質がある。最後の **(R4)** において $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2$ であるから、ベクトルの「長さ」が内積によって定義されることがわかる。

さて、ベクトルの成分は必ずしも実数とは限らない。複素 n 成分をもつ数ベクトルの空間を $\mathbb{C}^n$ と書くことにしよう。ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ では、内積をどのように定義すればよいだろうか？例えば

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \tag{4.5.2}$$

について、(4.5.1) によって $\|\boldsymbol{a}\|^2$ を計算してみると

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 1\times 1 + (-2i)\times(-2i) = -3 < 0 \tag{4.5.3}$$

となり、$\boldsymbol{a}$ は虚数の「長さ」をもってしまうことになる。これはいずれ悪いことが起こってしまいそうなので、内積の定義を次のように変更しよう。2 本のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^n$ に対して、

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} := a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 + \cdots + a_n\bar{b}_n \tag{4.5.4}$$

と定義する。ここで $\bar{b}_j$ は b_j の共役複素数である[19]。このように定義しておけば、ベクトル (4.5.2) の長さの 2 乗は

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 1\times 1 + (-2i)\times(2i) = 5 > 0 \tag{4.5.5}$$

となって、$\boldsymbol{a}$ の長さは実数値に確定する。ここから、複素ベクトルの内積については

(C1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}$

(C2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ （分配則）

(C3) $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = k\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b}) = \bar{k}\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$、 ただし $k\in\mathbb{C}$（スカラー倍）

(C4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geq 0$、等号成立は $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のときのみ

のような性質があることがわかる。

前節までに、必ずしも数ベクトルとは限らないベクトル空間があることを見たが、そのような一般の線形ベクトル空間においても、**(R1)–(R4)** あるいは **(C1)–(C4)** が成り立つような演算を「内積」と呼ぶことにする。内積が定められているベクトル空間を**計量ベクトル空間**と呼ぶ。

[19] この定義では、ベクトル $\boldsymbol{b}$ の成分を共役複素数としたが、物理では一般に左側の $\boldsymbol{a}$ の成分を共役複素数にする定義が多い。ここでは教科書に合わせた定義を採用した。

例：　実係数 n 次多項式 $f(x),\, g(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ に対して、内積を

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \tag{4.5.6}$$

と定義すれば、**(R1)–(R4)** が満たされる。

例：　複素係数 n 次多項式 $f(x),\, g(x) \in \mathbb{C}[x]_n$ に対して、内積を

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx \tag{4.5.7}$$

と定義すれば、**(C1)–(C4)** が満たされる。

　さて、それぞれのベクトル空間 V において内積が定まれば、各元 $f \in V$ に対して

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} \tag{4.5.8}$$

を f の長さ、あるいはノルムと呼んでよいだろう。内積とは、そのベクトル空間における「長さ」の基準を与えているのである。さらに、内積を定義することによって 2 本のベクトルのなす角も決めることができる。これを見るために、次の定理を準備する。

定理（シュバルツの不等式）：

計量ベクトル空間 V の元 $\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}$ に対して

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2 \leq \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \tag{4.5.9}$$

が成立する。

　定理 (4.5.9) より、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ のとき[20]、

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \leq 1 \tag{4.5.10}$$

であるから、この不等号に挟まれた量を $\cos\theta$ とおけば、ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を決めることができる。

定理 (4.5.9) の証明：　$\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}$ に対して、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線型結合であり、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = 0$ となるような $\boldsymbol{c} = t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ を求める。このとき、

$$t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; t = -\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \tag{4.5.11}$$

のように t が決まるが、一方、$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} - t\boldsymbol{a}$ だから

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c} - t\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c} - t\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} + |t|^2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \geq |t|^2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \tag{4.5.12}$$

がわかり、(4.5.11) を代入して

$$\|\boldsymbol{b}\|^2 \geq \frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2}{\|\boldsymbol{a}\|^4}\|\boldsymbol{a}\|^2 \tag{4.5.13}$$

が得られ、(4.5.9) が示せた。

[20] このような空間を実計量線形空間という。$\mathbb{R}^n$ はもちろんそのようなベクトル空間である。

正規直交基底：　見てきたように、ベクトル空間に内積が定義されていれば、２本のベクトルたちのなす角を決めることができ、特に、それらが直交しているかどうかを決められる。様々な考察においては、互いに他の全てと直交し長さが１であるような「基底ベクトル」の組を考えると便利なことが多い。例えば３次元の幾何ベクトル空間においては、図 4.5 のようなベクトルたちであり、

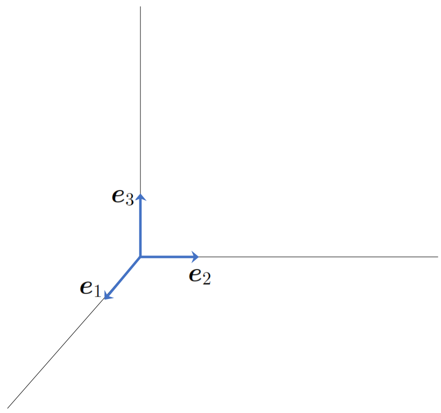

図 4.5:

n 次元空間の場合には

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.5.14}$$

のように定義される。ここで $i, j = 1, 2, \ldots, n$ である。

直交補空間：　W をある計量ベクトル空間 V の線形部分空間とする。このとき、W の全てのベクトルと直交するベクトルの集合を $W^\perp$ とすれば、$W^\perp$ もまた V の線形部分空間になる。

例として、$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される部分空間 W[21]の直交補空間を考えてみよう。直交補空間の元 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W^\perp$ は、条件

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; x + y + z = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -y - z \tag{4.5.15}$$

を満たすから、$\boldsymbol{x}$ は一般に

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z =: y\boldsymbol{v}_1 + z\boldsymbol{v}_2 \tag{4.5.16}$$

と書くことができる。したがって、この $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が $W^\perp$ の１組の基底である。

基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ から正規直交基底を構成してみよう。まず、$\boldsymbol{v}_1$ を基準にして、長さが１のベクトル $\boldsymbol{e}_1$ を作る。これには $\boldsymbol{v}_1$ を $\boldsymbol{v}_1$ の長さで割ればよいから、

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.5.17}$$

[21]原点を通り、方向ベクトル $\boldsymbol{a}$ をもつ直線のこと。

が得られる。次に、$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$ であり、長さ 1 のベクトル $\boldsymbol{e}_2$ を求めるが、まず $\boldsymbol{e}_2' := \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2))\boldsymbol{e}_1$ とすれば、$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2' = 0$ は明らかだから、$\boldsymbol{e}_2'$ 方向を向いた長さ 1 のベクトル $\boldsymbol{e}_2$ を作ればよい。これは

$$\boldsymbol{e}_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.5.18}$$

より $\|\boldsymbol{e}_2'\|^2 = 3/2$ であるから、

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{4.5.19}$$

のように求まる。

4.6　グラム・シュミットの直交化

先ほどの正規直交基底の構成法を n 次元ベクトル空間の場合に一般化する。必ずしも正規直交基底ではない V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ から、正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を作るアルゴリズムは以下の通りであり、これをグラム・シュミットの直交化と呼ぶ。

(1) $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}$ とする。

(2) $\boldsymbol{e}_2' := \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2))\boldsymbol{e}_1$ から $\boldsymbol{e}_2 := \dfrac{\boldsymbol{e}_2'}{\|\boldsymbol{e}_2'\|}$ として $\boldsymbol{e}_2$ が決まる。

(3) $\boldsymbol{e}_3' := \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{v}_3))\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{v}_3))\boldsymbol{e}_2$ ($\Rightarrow \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3' = 0$) から $\boldsymbol{e}_3 := \dfrac{\boldsymbol{e}_3'}{\|\boldsymbol{e}_3'\|}$ として $\boldsymbol{e}_3$ が決まる。

(4) これを繰り返し、$k = 4, 5, \ldots, n$ として順番に $\boldsymbol{e}_k' := \boldsymbol{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{v}_k)\boldsymbol{e}_j$ をつくり、$\boldsymbol{e}_k := \dfrac{\boldsymbol{e}_k'}{\|\boldsymbol{e}_k'\|}$ として $\boldsymbol{e}_k$ を決める。

この方法は応用上大変重要であり、いずれ使う場面が必ず来るはずである。

演習課題 14

(14-2) 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において、ベクトル $\boldsymbol{a} = (1, 2, -1)$ で生成される部分空間を W とするとき、その直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ。

(14-3) 次の 3 つの 1 次独立なベクトルを正規直交化せよ。

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(14-4) 多項式 $p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ p_1(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}x,\ p_2(x) = \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1),\ p_3 = \frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3 - 3x)$ は内積 $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx$ のもとで正規直交基底をなすことを示せ。