

## 1 複素関数論

この章では、複素関数について考察する。近い将来、本章の内容が量子力学をはじめとする現代物理学の考察において必須のものであることを見るであろう。

### 1.1 複素数

良く知られているように、 $-1$ の平方根  $\sqrt{-1}$  を  $i$  と書く。2つの実数  $x, y$  によって  $z = x + iy$  と書かれるような数を複素数という。また  $x, y$  をそれぞれ複素数  $z$  の実数部分、虚数部分とよび、 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$  のように書く。複素数が加減乗除について閉じていることは簡単に示せるから、複素数の集合は体を成すことがわかる。

**複素平面** 実数の集合は数直線で表わされたが、複素数は2つの実数  $x, y$  の組によって書けるから、2次元平面によって表現できる。この2次元平面を複素平面とよぶ。平面上の点は極座標によっても表現できるから、複素数も「極表示」が可能である。

例：  $n$  乗すると1になる複素数を1のべき根とよぶ。たとえば  $n = 3$  のとき、1の3乗根は1の他に、

$$e^{2\pi i/3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad (1.1.1)$$

$$e^{4\pi i/3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \quad (1.1.2)$$

があり、全部で3つある。一般に1の  $n$  乗根は  $e^{2\pi ki/n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  で与えられる。

例： 一見、意味不明な数も極表示によって簡単になる場合がある。たとえば

$$i^i = (e^{\pi i/2})^i = e^{-\pi/2} \quad (1.1.3)$$

など。ただし、 $i$  の位相因子による不定性は除いた。

**共役複素数** ある複素数  $z = x + iy$  に対して、複素平面上の実軸に対して対称な位置にある複素数  $x - iy$  を  $\bar{z}$  あるいは  $z^*$  と書き、 $z$  の共役複素数という。これを用いると、 $z$  の実数部分および虚数部分はそれぞれ  $x = (z + \bar{z})/2$  および  $y = (z - \bar{z})/2i$  のように書ける。

**絶対値** 2つの異なる実数の間には大小関係があるが、一般に2つの異なる複素数の間には大小関係を定義できない。ある複素数の「大きさ」についてよく用いられるのは、複素平面の原点との間の距離  $\sqrt{x^2 + y^2}$  であり、これを  $|z|$  と書いて複素数  $z$  の絶対値という。共役複素数を用いれば  $|z|^2 = z\bar{z}$  のように書くことができる。

### 1.2 複素関数と微分

実数から実数への写像  $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$  を実1変数関数、同様に2つの実数の組から実数への写像  $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$  を実2変数関数と呼んだ。これにならって、複素(1変数)関数  $\mathbb{C} \ni z \mapsto w = f(z) \in \mathbb{C}$  を考える。先に見たように複素数  $z = x + iy$  は二つの実数の組とみることができるが、複素関数の値域  $w$  もまた複素数であるから、

$$w = f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y), \quad u, v \in \mathbb{R} \quad (1.2.1)$$

のように複素関数は二つの実2変数関数の組とみることができる。

### 1.2.1 複素微分

複素平面上のある点  $z_0 = x_0 + iy_0$  における  $f(z)$  の微分係数  $f'(z_0)$  は

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (1.2.2)$$

のように定義するのが自然である。このとき導関数  $f'(z)$  も同様に定義される。これは一見、実 1 変数関数の微分係数や導関数の定義と同じであるように見えるが、複素関数の定義域は複素平面であるから  $z$  の  $z_0$  への近づけ方は無数に考えられる。この定義は、極限值が  $z_0$  への近づき方によらず同じ値になることを要求しているから、複素関数  $f(z)$  に対する極めて強い条件である。特に  $(x_0, y_0)$  に対して、 $y = y_0$  と固定して  $x$  軸 (実軸) の方向から近づいた場合と、 $x = x_0$  と固定して  $y$  軸 (虚軸) の方向から近づいた場合を書き下してみると、

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (1.2.3)$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (1.2.4)$$

であるから、これらが等しいという条件は両式の実成分と虚成分を比べて、

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (1.2.5)$$

となることがわかる。これが複素関数が  $z_0 = x_0 + iy_0$  において微分可能であるための必要条件であり、Cauchy-Riemann の微分方程式と呼ばれる。

逆にこれが十分条件であることを示す。関数  $f(z)$  が  $z = z_0$  で微分可能とは、 $f(z)$  の  $z = z_0$  の周りでの振る舞いが

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + o(h), \quad h := |z - z_0| \quad (1.2.6)$$

となることである。ここで  $o(h)$  は  $h$  より高次の無限小、つまり  $o(h)/h \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ) を意味する記号である。また、 $\alpha$  は  $z = z_0$  における微分係数と解釈されるべき複素数である。 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $\alpha = a + ib$  と書いて代入し、実数部分と虚数部分をそれぞれ書き下すと、

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + o(h) \quad (1.2.7)$$

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + b(x - x_0) + a(y - y_0) + o(h) \quad (1.2.8)$$

であるが、これは 2 つの実 2 変数関数の微分可能条件と等価であり、実定数  $a, b$  は各方向の偏微分係数により与えられることがわかる。これらを比較すれば、

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad b = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (1.2.9)$$

であることがわかり、Cauchy-Riemann 方程式は十分条件であることがわかった。

**正則関数** 微分可能な複素関数  $f(z)$  を複素正則関数あるいは正則関数と呼ぶ。もし  $f(z)$  が複素平面上の領域  $D$  で正則ならば、微分係数あるいは導関数の定義は形式的に実 1 変数関数のものと同じだから、微分の操作は実 1 変数関数と同様の代数的な演算になる。どのような関数が正則なのか例で考えよう。

例:  $f(z) = z^2$  を考える。  $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$  であるから、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x \quad (1.2.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y \quad (1.2.11)$$

であり、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つから  $f(z) = z^2$  は全複素平面  $\mathbb{C}$  で正則である。実際、

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2zh + h^2}{h} = 2z \quad (1.2.12)$$

と導関数は実関数の場合と同じように計算できる。一般に、 $f(z) = z^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) の導関数が  $f'(z) = nz^{n-1}$  となることも同様である。

例:  $f(z) = 1/z$  を考える。  $f(z) = 1/z = (x - iy)/(x^2 + y^2)$  であるから、 $z \neq 0$  ならば

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (1.2.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (1.2.14)$$

であり、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。また  $z = 0$  においては  $f(z)$  および偏微分係数が発散する。したがって、 $f(z)$  は全複素平面  $\mathbb{C}$  から原点を除いた領域で正則である。導関数は実関数の場合と同様に  $f'(z) = -1/z^2$  である。

例:  $f(z) = e^z$  を考える。  $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$  であるから、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y) = e^x \cos y \quad (1.2.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) = e^x \sin y \quad (1.2.16)$$

であり、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つから  $f(z) = e^z$  は全複素平面  $\mathbb{C}$  で正則である。導関数は実関数の場合と同様に  $f'(z) = e^z$  である。

例: 微分できない場合  $f(z) = \bar{z}$  を考える。  $f(z) = \bar{z} = x - iy$  であるから、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} x = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-y) = -1, \quad (1.2.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} x = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (-y) = 0 \quad (1.2.18)$$

であり、Cauchy-Riemann 方程式は成り立たない。したがって、 $f(z) = \bar{z}$  は  $\mathbb{C}$  で微分不可能である。実際、 $f(z)$  の  $z = z_0$  における微分係数を求めると

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{-2i\theta} = e^{-2i\theta} \quad (1.2.19)$$

となり、微分係数は  $z_0$  に近づく方向によりすべて異なることがわかる。

最後の例から推測できるように、 $f(z)$  が  $\bar{z}$  に依存している場合、一般に微分不可能である。これを見るために、

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (1.2.20)$$

のように  $x, y$  についての微分を  $z, \bar{z}$  微分に書き換え、 $f(z)$  に作用させてみると

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.2.21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.2.22)$$

となるが、もし Cauchy-Riemann 方程式が成り立てば下段の式はいつでも 0 になる。つまり、 $f(z)$  がある領域で正則であることと

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (1.2.23)$$

は等価であり、これは  $f(z)$  は  $\bar{z}$  に依存しないことを意味する。

## 演習課題 1

演習 1.1 次の複素数を  $x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) の形に直せ。

(1)  $2^{1+i}$

(2)  $\sqrt{2i}$

(3)  $e^{(a+bi)^2}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

(4)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2}i)^{-1}$

演習 1.2 次の複素関数の正則性を調べ、正則な場合は導関数を求めよ。

(1)  $1/z^2$

(2)  $\frac{1-z}{1+z}$

(3)  $\sin z$

## 1.2.2 べき級数

最も簡単な正則関数は多項式関数、 $f(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$  であり、これが  $\mathbb{C}$  で正則なのは明らかである。多項式関数を  $N \rightarrow \infty$  に一般化して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1.2.24)$$

を考えよう。このような関数をべき級数と呼ぶ。

**収束性** べき級数は無限の項をもつから、原点以外で有限値をとるかどうかは明らかではない。あるべき級数が  $|z| > 0$  で有限値をとるとき、 $|z|$  で収束するというが、特に各項の絶対値の和  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$  が収束するとき、このべき級数は絶対収束するという。もしある正の数  $\rho$  があって、 $|z| < \rho$  で絶対収束し  $|z| > \rho$  で発散するとき、 $|\rho|$  をこのべき級数の収束半径という。収束半径の求め方としてよく知られているのは次のものである。

**係数比較法**： 各項の係数  $a_n \neq 0$  で、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$  が存在すればそれは  $\rho$  に等しい。

**Cauchy-Hadamard の判定条件**：  $\frac{1}{\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 、ここで  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$  は上極限である。

**例**： べき級数  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots$  の収束半径は係数比較法より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty \quad (1.2.25)$$

であるから、このべき級数の収束半径は  $\infty$  であり、全複素平面で収束する。この関数  $f(z)$  を指数関数と呼び  $e^z$  と書く。

**解析関数** ここまでは正則関数  $f(z)$  の原点の周りのべき級数を考えたが、一般に複素平面上のある点  $c$  の周りの収束べき級数展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (1.2.26)$$

を考えることもできる。これはもちろん  $z = c$  の周りの Taylor 展開に他ならないが、このようにある関数  $f(z)$  が複素平面上の領域  $D$  の各点  $c$  で収束べき級数に展開できるとき、 $f(z)$  は  $D$  で解析的であるという。また収束べき級数であらわされた関数を解析関数という。

## 1.2.3 多価関数

これまで考えてきた複素関数  $w = f(z)$  は、与えられた  $z \in \mathbb{C}$  に対して  $w \in \mathbb{C}$  がただ一つ決まるようなものであった。しかし実関数の場合と同様に、 $z$  と  $w$  の関係式が与えられたとき、一般に  $w$  の値がただ一つに決まるとは限らない。与えられた  $z$  に対して、値  $w$  が一つに決まらないような「関数」を多価関数と呼ぶことにしよう。

**例：**  $w^2 = z$  という関係式から定まる「複素関数  $w = f(z)$ 」を考える。これは  $w = z^{1/2}$  と書いてよいと思われるが、 $z$  の偏角には  $2\pi i$  の整数倍だけの不定性があることを考慮すれば、 $w = \sqrt{r}e^{i(\theta+2\pi n)/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{i\pi n}$  となり、 $n$  の偶奇に応じて  $w$  は  $\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$  と 2 つの値を取り得る。したがって、 $z^{1/2}$  は多価 (2 価) 関数である (この事情は実関数の場合と同様)。

**例：**  $e^w = z$  から定まる複素関数を  $w = u + iv$ , ( $u, v \in \mathbb{R}$ ) とすれば  $e^u = r \Leftrightarrow u = \log r$  および  $v = \theta + 2\pi n$  であるから、この場合は無限の多価性を生ずることがわかる。この複素関数を  $w = \log z$  と書く。つまり、複素関数としての対数関数は無限多価関数である。

多価関数の特徴と取り扱いについて考察してみよう。

**分岐点** まず  $z$  が原点 ( $z = 0$ ) の周りを 1 周したときの  $w$  の値の変化について考える。出発点がある実数  $\varepsilon$  にとり反時計回りに原点を 1 周すれば、 $z$  の偏角は 0 から  $2\pi$  まで変化するから、 $w = z^{1/2}$  の場合、 $w$  の値は  $\sqrt{\varepsilon} \rightarrow -\sqrt{\varepsilon}$  となり、一方  $w = \log z$  の場合には  $\log \varepsilon \rightarrow \log \varepsilon + 2\pi i$  となって、いずれも元の値には戻らない。このように、その点を周ったときに値が元に戻らないような点を分岐点 (branch point) と呼ぶ。 $z^{1/2}$  と  $\log z$  はいずれも原点を分岐点にもつが、さらに無限遠点  $|z| \rightarrow \infty$  も分岐点であることが示せる。

**Branch cut** 多価関数を一価正則関数として取り扱うために、定義域を制限することがしばしば行なわれる。

**例：**  $w = \log z$  の定義域を、 $n = 0$  ととって  $z = re^{i\theta}$ , ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) と制限すれば、 $w = u + iv = \log r + i\theta = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x}$  は一価正則関数となる。

この場合の定義域は  $z$  平面から正の実軸 ( $x \geq 0$ ) を除いた領域となるが、この除かれた部分を切れ目 (branch cut)、あるいは cut という。branch cut の取り方は明らかに任意である。例えば、 $-\pi < \theta \leq \pi$  と制限すれば負の実軸が cut になる。このようにして作られた一価関数を多価関数の分枝 (branch) と呼ぶ。特に、 $n = 0$  に制限した場合の分枝を主分枝 (principal branch)、その関数値を主値 (principal value) と呼ぶことも多い。

このように定義域 (複素平面) に cut を入れて多価関数を一価正則関数とみなすことは可能ではあるが、実は多価関数の本来の定義域は、1 枚の複素平面よりも広いものと考えの方がより自然である。この本来の定義域は Riemann 面と呼ばれるが、本講義では扱わないことにする。

## 1.3 複素積分

### 1.3.1 複素線積分

次に複素関数の積分を考える。複素関数の定義域は 2 次元の広がりをもっているから、考えるべき積分は必然的に線積分となる。以下の考察では、特に正則関数の線積分に注目する。

**例：** 正則関数  $1/(z^2 + 4)$  を原点から  $z = i$  まで虚軸に沿って線積分する。積分変数を  $z = iy$  と置き換えれば、

$$\begin{aligned} \int_0^i \frac{dz}{z^2 + 4} &= \int_0^1 \frac{id y}{-y^2 + 4} = -\frac{i}{4} \int_0^1 \left( \frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2} \right) dy = -\frac{i}{4} \log \frac{y-2}{y+2} \Bigg|_0^1 \\ &= -\frac{i}{4} \left( \log \frac{(-1)}{3} - \log(-1) \right) = \frac{i}{4} \log 3 \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

がわかる。

例： 正則関数  $1/(z-1)$  を  $z=1$  を中心とした半径 1 の円周上を  $z=2$  から原点まで反時計回りに半周線積分する。 $z=1$  を中心とした極表示をすれば、円周上の点は  $z=1+e^{i\theta}$  のように書け、 $dz=ie^{i\theta}d\theta$  であるから、

$$\int_C \frac{dz}{z-1} = \int_0^\pi i d\theta = i\pi \quad (1.3.2)$$

となる。

以上の例のように、一般に線積分においては積分経路に応じた適切な表示をとる必要がある。しかし、複素正則関数の積分においては次回考えるような強力な定理があり、この問題にあまり悩む必要がない場合も多い。

## 演習課題 2

演習 2.1 次のべき級数の収束半径を求めよ。

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^n$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)z^n$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$$

演習 2.2 関数  $w = z^{1/2}$  について以下のことを示せ。

- (1)  $z = 1$  は分岐点ではないこと。
- (2) 無限遠点  $|z| \rightarrow \infty$  は分岐点であること。

演習 2.3 複素関数  $w = \log z$  を考える。ここでは  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  および  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$  を用いてよい。

- (1)  $\log z$  はある分枝において正則であることを示せ。
- (2) 正則関数に対しては  $\frac{d}{dz} = \frac{\partial}{\partial x}$  であることを用いて  $(\log z)' = \frac{1}{z}$  を示せ。

演習 2.4 複素積分

$$\int_0^{1+i} z dz$$

の値を求めよ。ただし積分経路は原点と  $z = 1 + i$  を結ぶ直線とする。

### 1.3.2 Cauchy の定理

正則関数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  がある単連結領域  $D$  内で正則であるとする。実はこのとき、 $D$  内の任意の単純閉曲線に沿った線積分はいつでも 0、つまり

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{1.3.3}$$

が示せる。これを Cauchy の定理といい、正則関数のもつ最も重要な性質である。

この定理を示すには、ベクトル値関数 (ベクトル場)  $\mathbf{p}(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$  の線積分に対する Green の公式

$$\oint_C p dx + q dy = \iint_R \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy \tag{1.3.4}$$

を用いる。ここでベクトル場は必要なだけ微分可能であるとし、 $R \subset D$ ,  $\partial R = C$  である。Green の公式は次のように示せる。まず

$$- \iint_R \frac{\partial p}{\partial y} dx dy = \int_C p dx, \tag{1.3.5}$$

であるが、領域  $R$  の境界が  $x \in [a, b]$  で  $y = f_1(x)$  および  $f_2(x)$  によって書けているとすると、

$$- \iint_R \frac{\partial p}{\partial y} dx dy = - \int_{x=a}^b \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial p}{\partial y} dx dy = \int_a^b \{p(x, f_1(x)) - p(x, f_2(x))\} dx = \int_C p dx, \tag{1.3.6}$$

が示せ、同様にして、

$$\iint_R \frac{\partial q}{\partial x} dx dy = \int_C q dy, \tag{1.3.7}$$

も示される。これを正則関数に応用すれば、 $f(z)dz = (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$  だから、実部、虚部それぞれに対して Green の公式を用いて

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy) = \iint_R \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_R \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy, \tag{1.3.8}$$

となるが、仮定より  $f(z)$  は正則であるから右辺は Cauchy-Riemann 方程式より 0 である。したがって、Cauchy の定理が示せた。

**例：**  $f(z) = z$  を原点を中心とした半径 1 の円周上で線積分する。積分路は  $z = e^{i\theta}$ ,  $(0 \leq \theta < 2\pi)$  と表せるので、

$$\oint_C z dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} i e^{2i\theta} d\theta = 0. \tag{1.3.9}$$

**積分路の変形** 直接の応用として、 $f(z)$  が  $D$  で正則なとき、 $p, q \in D$  を結ぶ  $D$  内の二つの経路  $C_1, C_2$  に対して、

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz. \tag{1.3.10}$$

がいえる。実際、Cauchy の定理から  $\int_{C_1+C_2^{-1}} f(z)dz = 0$  であるが、

$$\int_{C_1+C_2^{-1}} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2^{-1}} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz, \tag{1.3.11}$$

となる。したがって、 $f(z)$  の正則領域においては線積分は経路によらず、積分経路は自由に変形できることがわかる。

**例：**  $f(z) = z^2$  を原点から  $1+i$  まで 2 つの経路で線積分する。一つは原点と  $1+i$  を直線で結ぶ経路、もう一つは  $(0,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (1,i)$  のように実軸と虚軸に平行な経路で積分を実行する。まず最初の経路は極座標が利用できて  $z = re^{i\pi/4}$  および  $dz = dre^{i\pi/4}$  と書けるから、

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \int_{r=0}^{\sqrt{2}} r^2 dr e^{3\pi i/4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3}(-1+i) \quad (1.3.12)$$

二つ目の経路はまず実軸上の積分、

$$\int_0^1 (x^2 - y^2 + i2xy) \Big|_{y=0} dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \quad (1.3.13)$$

および虚軸に平行な積分

$$\int_1^{1+i} (x^2 - y^2 + i2xy) \Big|_{x=1} idy = i \int_0^1 (1 - y^2 + 2iy) dy = -1 + \frac{2}{3}i \quad (1.3.14)$$

の和であるから、同じ結果になることが確かめられる。

**非正則点の周回積分**

積分経路の内部に非正則点が含まれる場合の線積分を考えよう。例として

$$f(z) = \frac{1}{(z-c)^n}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.3.15)$$

を考えると、これは  $z = c$  で非正則であるがそれ以外では正則である。この関数を  $z = c$  の周りの単位円に沿って線積分すると、 $c$  の周りの極座標  $c + re^{i\theta}$  をとれば

$$\oint_C \frac{dz}{(z-c)^n} = \int_0^{2\pi} (e^{i\theta})^{-n} ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi i & n = 1, \\ 0 & \text{それ以外の } n, \end{cases} \quad (1.3.16)$$

となり、 $f(z) = 1/(z-c)$  以外は Cauchy の定理と同じ結論になり  $n = 1$  の場合を除けば、線積分はやはり経路によらないことがわかる。

**原始関数**

なぜ  $n = 1$  だけが特別なのかを考えよう。関数  $f(z)$  の線積分が経路によらない現象の背後にあるのは、原始関数  $F(z)$  の存在である。ここで原始関数とは  $F'(z) = f(z)$  となるような**正則関数**と定義される。実は、もしある領域  $D$  においてこのような原始関数が存在すれば、 $p, q \in D$  を結ぶ任意の曲線  $\gamma$  に沿った線積分の値は

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(q) - F(p) \quad (1.3.17)$$

のように原始関数の両端の値だけで決まることが示せる。特に  $p = q$  の場合には  $\gamma$  は閉曲線となり  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$  である。これは「微積分学の基本定理」に類似しているが、考察しているのは複素平面上の線積分だから、積分値が経路によらないという、より強い主張になっている。

**例：** 先程の例  $\int_0^{1+i} z^2 dz$  では、 $z^2$  の原始関数は  $z^3/3$  で与えられるから、

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3} (1+i)^3 = \frac{1}{3} (-2+2i) \quad (1.3.18)$$

となる。

さて、 $c = 0$  として  $f(z) = 1/z^2$  を考えると、これは原点を除いた領域で  $F(z) = -1/z$  のような原始関数をもつから、

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2} = 0 \quad (1.3.19)$$

が成り立つ。一方、 $f(z) = 1/z$  を考えると、 $(\log z)' = 1/z$  だから原始関数として  $\log z$  をとれそうである。しかし、前述のように  $\log z$  は多価関数であり、普通の意味の正則関数ではない。したがって、 $1/z$  は  $\mathbb{C}$  において原始関数をもたないことになる。これが  $n = 1$  だけが特別であった理由である。

## 演習課題 3

演習 3.1 次の線積分を適当な経路を定めて実行せよ。また、被積分関数の原始関数を求め、積分値が積分区間の両端の値の差になっていることを確かめよ。

$$(1) \int_0^{-1+i} (iz + 1) dz$$

$$(2) \int_1^i \frac{dz}{z^2}$$

演習 3.2 次の線積分の値を求めよ。ただし、 $C$  は  $z = i$  を中心とした、半径 1 の円とする。

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 1} dz.$$

演習 3.3 次の線積分：

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{4z + 3}{2z^2 - 3z - 2} dz,$$

の値を (i)  $r < 1/2$ , (ii)  $1/2 < r < 2$ , (iii)  $2 < r$  の場合について求めよ。

### 1.3.3 Cauchy の積分公式

Cauchy の定理の条件の下で、より応用の広い次の公式、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (1.3.20)$$

が得られる。ここで  $z$  は単純閉曲線  $C$  の内部の点である。これを Cauchy の積分公式という。以下に証明の概略を与える。まず、被積分関数  $f(w)/(w-z) =: g(w)$  は  $w \neq z$  では正則であるから、 $w = z$  を取り囲む十分に小さな円周を反時計回りに回る経路を  $\gamma$  とすれば、 $C$  と  $\gamma^{-1}$  で取り囲まれた領域で被積分関数は正則で、

$$\int_{C+\gamma^{-1}} g(w)dw = 0, \quad (1.3.21)$$

が成立する。したがって

$$0 = \int_{C+\gamma^{-1}} g(w)dw = \int_C g(w)dw - \int_\gamma g(w)dw, \Leftrightarrow \int_C g(w)dw = \int_\gamma g(w)dw \quad (1.3.22)$$

がいえる。次に右辺の積分を評価する。円周  $\gamma$  上では  $w = z + \rho e^{i\theta}$  とパラメータ表示できるので、

$$\int_\gamma g(w)dw = i \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\theta})d\theta, \quad (1.3.23)$$

となり、極限  $\rho \rightarrow 0$  をとると、

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_\gamma g(w)dw = \lim_{\rho \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\theta})d\theta = 2\pi i f(z), \quad (1.3.24)$$

となる。最後に極限と積分が交換可能であることを用いたが、これは厳密に正当化できる。

この公式を用いると、積分計算をせずに積分値を求められる場合がある。

**例：** 周回積分

$$I = \oint \frac{e^z}{z^2 + \pi^2/4} dz, \quad (1.3.25)$$

の値を求める。ただし、積分経路は原点中心半径 2 の円周を正方向にまわる。

$$\frac{1}{z^2 + \pi^2/4} = \frac{1}{i\pi} \left( \frac{1}{z - i\pi/2} - \frac{1}{z + i\pi/2} \right), \quad (1.3.26)$$

であるから、 $f(z) = e^z$  とおいて定理を適用すれば、

$$I = \frac{1}{i\pi} \left( \oint \frac{e^z}{z - i\pi/2} dz - \oint \frac{e^z}{z + i\pi/2} dz \right) = \frac{1}{i\pi} \left( 2\pi i e^{i\pi/2} - 2\pi i e^{-i\pi/2} \right) = 4i \quad (1.3.27)$$

がわかる。

**導関数の積分表示** Cauchy の積分公式 (??) の右辺はパラメーター  $z$  を含んだ定積分と考えられる。もし  $z$  微分と  $w$  積分が交換可能であれば、両辺を微分することによって

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad (1.3.28)$$

が成立する。まずはこれが成立することを示そう。(??) の両辺を定義通り微分すれば、右辺は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i h} \oint_C \left( \frac{f(w)}{w-z-h} - \frac{f(w)}{w-z} \right) dw$$

となるが、積分内は

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z-h} - \frac{1}{w-z} &= \frac{h}{(w-z-h)(w-z)} = \frac{h(w-z)}{(w-z)^2(w-z-h)} \\ &= h \frac{w-z-h+h}{(w-z)^2(w-z-h)} = \frac{h}{(w-z)^2} + \frac{h^2}{(w-z)^2(w-z-h)} \end{aligned}$$

を用いれば、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw + \frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^2(w-z-h)} dw \right) \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^2(w-z-h)} dw \end{aligned}$$

と変形できる。この最後の項は積分路  $C$  で被積分関数が有界であることにより、その絶対値は有限値となる。したがって、最後の項は極限で 0 となることが示せるから、

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z} \oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\partial}{\partial z} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

がわかった。これを繰り返せば (??) も同様に示せる。この公式もまた利用価値が高い。

**例：** 周回積分  $\oint_C \frac{\sin w}{(w-\pi/4)^2} dw$  の値を求める。ただし  $C$  は  $w = \pi/4$  を取り囲む正の向きの閉曲線とする。導関数の積分表示において、 $f(w) = \sin w$ ,  $n = 1$  の場合から

$$f'(\pi/4) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-\pi/4)^2} dw \Leftrightarrow \oint_C \frac{\sin w}{(w-\pi/4)^2} dw = 2\pi i \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\pi i \quad (1.3.30)$$

である。

以上、Cauchy の積分公式と、そこから派生した導関数の積分表示から見えることは、ある点における正則関数の値は周囲の値の重ね合わせで決まってしまうということであり、正則関数とは限りなく調和のとれた特別なものであることがわかるであろう。

### 1.3.4 孤立特異点と Laurent 展開

正則関数は各点の周りで Taylor 展開ができたが、正則でない点の周りではどのように表現されるだろうか。例えば  $f(z)$  が原点  $z = 0$  で非正則であれば、この関数を原点の周りで級数展開したときには必ず負べき項が含まれ

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad (1.3.31)$$

のように表せるのではないかと推察できる。実際、一般に  $z = a$  の周りの円環領域  $R' < |z - a| < R$  で正則な関数に対して、 $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw$  とおけば

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad (1.3.32)$$

のように級数展開できることが示せる。ここで  $\gamma$  は  $a$  を中心とする半径  $R' < \rho < R$  の円周である。このような負べき項を含む級数を Laurent 級数とよび、この展開を  $f(z)$  の  $z = a$  の周りの Laurent 展開という。また、負べきの部分を Laurent 展開の主要部という。

**例：** 関数  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  を原点の周りで Laurent 展開する。 $f(z)$  を部分分数に分解すれば

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - (1 + z + z^2 + \dots) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (1.3.33)$$

のように展開できるが、右辺の正べきの部分の収束半径は 1 であるから、これは  $0 < |z| < 1$  のような円環領域で有効な Laurent 展開である。また、 $|z| > 1$  に対しては

$$-\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) \quad (1.3.34)$$

のように展開できるから

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (1.3.35)$$

が得られる。これは  $f(z)$  の円環領域  $1 < |z| < \infty$  における Laurent 展開である。

**例：** 関数  $e^{1/z}$  を原点の周りで Laurent 展開する。

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} \quad (1.3.36)$$

これは円環領域  $0 < |z| < \infty$  における Laurent 展開である。

演習 4.1 次の線積分の値を求めよ。ただし、 $C$  はいずれも円周  $|z| = 2$  を正の向きに周る経路とする。

$$(1) \oint_C \frac{e^z}{z^2} dz$$

$$(2) \oint_C \frac{3z^2 + 2z + 1}{(z-1)^3} dz$$

演習 4.2 導関数の積分表示を用いて、領域  $D$  における正則関数  $f(z)$  は  $D$  内の点  $z_0$  において Taylor 展開可能であることを示せ。ただし、べき級数は項別に積分可能であることは仮定してよい。これにより、正則関数と解析関数は同じ概念であることが分かる。

演習 4.3 次の関数を原点の周りで Laurent 展開し、その展開が有効な円環領域も示せ。

$$(1) \frac{1}{z(z^2 + 1)}$$

$$(2) \frac{\sin z}{z^2}$$

**孤立特異点の分類** 関数  $f(z)$  が  $z = a$  の周りの半径  $R$  の円内に  $a$  以外の非正則点をもたない場合を考えよう。このような  $a$  を  $f(z)$  の孤立特異点 (isolated singularity) という。上の例において、原点が孤立特異点であることは明らかである。孤立特異点の周りの円環領域  $0 < |z - a| < R$  において  $f(z)$  は正則だから Laurent 展開が可能であり、これを用いて以下のような孤立特異点の分類ができる。

- (i) 展開が主要部をもたない場合、 $z = a$  はもちろん正則点 (regular point) であり、Laurent 展開は Taylor 展開に他ならない。また、 $\sin z/z$  の原点のように定数項  $a_0$  が不定形の場合、 $a_0 = 1$  と定めれば、

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left( z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \dots \right) = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 - \dots \quad (1.3.37)$$

のように展開できる。このようなものを除去可能特異点 (removable singularity) という。

- (ii) 主要部の項数が有限の場合の孤立特異点を極 (pole) という。たとえば、

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \dots \quad (1.3.38)$$

のような場合、 $n$  位の極とよぶ。極において  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)|$  は発散する。

- (iii) 主要部が無限に続く場合、その孤立特異点を真性特異点 (essential singularity) という。 $e^{1/z}$  の原点は真性特異点である。真性特異点において  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)|$  は存在しない。

**例：** もちろん孤立していない特異点も存在する。

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)} \quad (1.3.39)$$

この例では、分母は  $z = 1/n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) で 0 となるので、特異点は 0 の近くに限りなくたくさん「積もって」いることがわかる。このことを、「特異点が  $z = 0$  に集積している」という。つまり、 $z = 0$  が特異点かどうかはわからないが、少なくとも孤立特異点ではない。

### 1.3.5 留数定理

関数  $f(z)$  は領域  $D$  において、有限個の孤立特異点  $z_1, z_2, \dots, z_N$  を除き正則であるとする。このとき、これらの孤立特異点を取り囲む、 $D$  内の閉曲線  $C$  に沿った  $f(z)$  の線積分の値は

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f(z), z_j) \quad (1.3.40)$$

で与えられる。ここで  $\text{Res}(f(z), z_j)$  は  $f(z)$  の  $z = z_j$  における Laurent 展開の  $(z - z_j)^{-1}$  の係数であり、 $z = z_j$  における留数 (residue) という。この定理は留数定理とよばれ、応用上大変重要である。

留数定理の証明の手順は次のとおり。

- (i) 孤立特異点  $z_1, z_2, \dots, z_N$  すべてを取り囲む単純閉曲線  $C$  と、各  $C_j$  のみを取り囲む小閉曲線  $C_j$  を用意する。次に  $C$  と各  $C_j$  をつなぐ曲線を考え、一つの閉曲線  $\gamma$  の内部には特異点がないように  $\gamma = C + C_1^{-1} + C_2^{-1} + \dots + C_N^{-1}$  を構成する。

- (ii) Cauchy の定理より  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$  がいえる。したがって、

$$\oint_C f(z) dz + \sum_{j=1}^N \oint_{C_j^{-1}} f(z) dz = 0 \Leftrightarrow \oint_C f(z) dz = - \sum_{j=1}^N \oint_{C_j^{-1}} f(z) dz = \sum_{j=1}^N \oint_{C_j} f(z) dz \quad (1.3.41)$$

が成り立つ。

(iii) 各孤立特異点近傍の円環領域  $0 < |z - z_j| < R$  において  $f(z)$  を Laurent 展開し、右辺の周回積分を実行すれば、0 でない値になるのは各  $z_j$  における  $(z - z_j)^{-1}$  の項だけであるから、 $\oint_{C_j} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}(z_j)$  となる。ここで  $a_{-1}(z_j) =: \text{Res}(f(z), z_j)$  は Laurent 展開の  $(z - z_j)^{-1}$  の係数である。

(iv) すべての孤立特異点からの寄与を足す。

留数定理より、 $f(z)$  の周回積分の値は孤立特異点近傍における Laurent 展開の  $-1$  次の係数  $a_{-1}$  がわかれば求まるが、それには次のように必ずしも Laurent 展開のすべての係数を求める必要はない。まず、 $f(z)$  が  $z = z_j$  で 1 位の極をもつ場合、 $f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_j} + a_0 + a_1(z - z_j) + \dots$  のように Laurent 展開できるから

$$a_{-1}(z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j) f(z) \tag{1.3.42}$$

がすぐわかる。同様に  $f(z)$  が  $z = z_j$  で  $n$  位の極をもつ場合、

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_j)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - z_j)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_j} + \dots \tag{1.3.43}$$

だから、全体に  $(z - z_j)^n$  をかけてから  $n - 1$  回微分すれば、

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_j)^n f(z) = (n - 1)! a_{-1} + n! a_0 (z - z_j) + \dots \tag{1.3.44}$$

が得られ、極限をとると

$$a_{-1}(z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{1}{(n - 1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_j)^n f(z) \tag{1.3.45}$$

がわかる。

**例：**  $f(z) = \frac{1}{z(z + 2)}$  の留数を求める。孤立特異点は  $z = 0$  および  $z = -2$  で、それぞれ 1 位の極であるから、

$$\text{Res}(f(z), 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z + 2} = \frac{1}{2}, \tag{1.3.46}$$

$$\text{Res}(f(z), -2) = \lim_{z \rightarrow -2} (z + 2) f(z) = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{1}{z} = -\frac{1}{2}. \tag{1.3.47}$$

**例：**  $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$  の留数を求める。孤立特異点は  $z = 0$  で 3 位の極であるから、

$$\text{Res}(f(z), 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (z^3 f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} (-\cos z) = -\frac{1}{2} \tag{1.3.48}$$

となる。一方、 $\cos z$  を Taylor 展開すれば、

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \left( 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \dots \right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \dots \tag{1.3.49}$$

となり、当然ながら同じ結果を導く。この場合には、直接 Laurent 展開をしてしまった方が早い。

**例：** l'Hospital の定理が使える場合もある。 $f(z) = \frac{1}{\sin z}$  は  $z = n\pi$  に孤立特異点をもつが、次の計算から  $z = n\pi$  は 1 位の極、留数は  $(-1)^n$  であることがわかる。

$$\lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{z - n\pi}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{1}{\cos z} = (-1)^n. \tag{1.3.50}$$

つまり、 $1/\sin z$  や  $1/\cos z$  などの孤立特異点は無限にたくさんあるが、どれもただの極である。

## 1.4 実積分への応用

正則関数に対する Cauchy の定理、およびそこから派生した諸定理は、実関数の定積分（広義積分）の計算に対して応用が広い。本節では実関数の定積分を、いったん正則関数の周回積分に置き換えることにより計算する手法について考える。

### 1.4.1 三角関数の周期積分

たとえば、

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} \quad (a > 1), \quad (1.4.1)$$

のような三角関数の 1 周期にわたる積分は、次のように複素平面の単位円周上の積分に置き換えられ、留数定理により値を求めることができる。

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad (1.4.2)$$

であるから、 $z = e^{i\theta}$  とおけばこれは複素平面上の単位円を表しているので、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} &= \oint \frac{1}{a + \frac{1}{2}(z + z^{-1})} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \oint \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \\ &= \frac{2}{i} \oint \frac{dz}{(z - \lambda_+)(z - \lambda_-)}, \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

と、正則有理関数の周回積分に帰着する。ここで、 $z^2 + 2az + 1 = 0$  の解を  $\lambda_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$  とおいた。被積分関数のこれらの極のうち、単位円内部にあるのは  $\lambda_+$  のみであるから、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} &= \frac{2}{i} \oint \frac{dz}{(z - \lambda_+)(z - \lambda_-)} = \frac{2}{i} \operatorname{Res} \left( \frac{1}{(z - \lambda_+)(z - \lambda_-)}, z = \lambda_+ \right) \\ &= \frac{4\pi}{\lambda_+ - \lambda_-} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}, \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

のように積分値が求まる。

演習 5.1 次の関数の各孤立特異点における留数を求めよ。

(1)  $\frac{z^3 + 5}{z(z-1)^3}$

(2)  $\frac{\cos z}{z^5}$

(3)  $\tan z$

演習 5.2 留数定理を用いて、次の積分値を計算せよ。

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \sin \theta}.$$

1.4.2 有理関数の広義積分

有理関数の無限区間にわたる定積分は、留数計算によって簡潔に求まる場合が少なくない。典型的な、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \tag{1.4.5}$$

を求めてみよう。まず、正則関数  $1/(z^4+1)$  の経路  $C$  に沿った周回積分を考える。ここで  $C$  は実軸上の区間  $[-R, R]$ 、および半径  $R$  の半円  $C_R$  にわたる経路である。ここで、半円は上半円または下半円を取れるが、ここでは上半円を取ることにする（どちらを選んでも結果は同じである）。したがって、この周回積分は次のように分解できる。

$$\oint_C \frac{dz}{z^4+1} = \int_{-R}^R \frac{dx}{x^4+1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1}. \tag{1.4.6}$$

左辺の周回積分の値は、以下のように留数定理により代数的に計算でき、求める値  $\pi/\sqrt{2}$  を与えることが示される。一方、右辺の第 1 項は  $R \rightarrow \infty$  の極限で求める広義積分になるから、右辺第 2 項が  $R \rightarrow \infty$  の極限で 0 になることが示せればよい。

まず、左辺の周回積分において、被積分関数の極は  $z^4 = -1$  で与えられるから、 $-1$  の 4 乗根を  $\omega := e^{i\pi/4}$  と書けば極の位置は、 $z = \omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7$  である。このうち、上半円の内側にある極は  $\omega$  と  $\omega^3 = -1/\omega$  である。したがって、それぞれの留数を計算すれば周回積分の値が求まる。 $z = \omega$  は 1 位の極であるから、標準的な求め方を適用すれば

$$\text{Res} \left( \frac{1}{z^4+1}, z = \omega \right) = \lim_{z \rightarrow \omega} \frac{z - \omega}{z^4+1} = \lim_{z \rightarrow \omega} \frac{z - \omega}{(z - \omega)(z - \omega^3)(z - \omega^5)(z - \omega^7)}, \tag{1.4.7}$$

を計算すれば良いが、これは少し面倒である。しかし、ロピタルの定理を用いれば

$$\text{Res} \left( \frac{1}{z^4+1}, z = \omega \right) = \lim_{z \rightarrow \omega} \frac{z - \omega}{z^4+1} = \lim_{z \rightarrow \omega} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4\omega^3} = -\frac{\omega}{4}, \tag{1.4.8}$$

のように比較的簡単に求まる。同様に、

$$\text{Res} \left( \frac{1}{z^4+1}, z = \omega^3 \right) = \frac{1}{4\omega}, \tag{1.4.9}$$

であるから、

$$\oint_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left( -\frac{\omega}{4} + \frac{1}{4\omega} \right) = \pi \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \tag{1.4.10}$$

となる。

一方、右辺第 2 項の半円状の積分値は、 $z = Re^{i\theta}$  とおくと、

$$\begin{aligned} |z^4+1| &= |R^4 e^{4i\theta} + 1| = \sqrt{(R^4 e^{4i\theta} + 1)(R^4 e^{-4i\theta} + 1)} \\ &= \sqrt{R^8 + 2 \cos 4\theta R^4 + 1} \geq \sqrt{R^8 - 2R^4 + 1} = R^4 - 1. \end{aligned}$$

であるから、

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1} \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{dz}{z^4+1} \right| \leq \frac{R}{R^4-1} \int_0^\pi d\theta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \tag{1.4.11}$$

となり、求める結果が得られる。

### 1.4.3 Fourier 変換型積分 I

次の Fourier 変換型積分を求めよう。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-a}, \quad (a > 0) \quad (1.4.12)$$

そのためにまず、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{a^2 + x^2} dx \quad (t > 0), \quad (1.4.13)$$

の値を求める。被積分関数をいったん正則関数と見直し、前例と同じ周回積分路  $C$  に沿って積分すると、留数定理より、

$$\oint_C \frac{e^{izt}}{z^2 + a^2} dz = \oint_C \frac{e^{izt}}{(z - ia)(z + ia)} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{izt}}{(z - ia)(z + ia)}, z = ia \right) = 2\pi i \frac{e^{-at}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-at}, \quad (1.4.14)$$

のように値が求まる。

一方、この積分路は前例同様に

$$\oint_C \frac{e^{izt}}{z^2 + a^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ixt}}{x^2 + a^2} dx + \int_{C_R} \frac{e^{izt}}{z^2 + a^2} dz \quad (1.4.15)$$

と実積分および半径  $R$  の半円上の積分に分解できるから、 $R \rightarrow \infty$  のとき右辺第 1 項が求める積分になる。実は、右辺第 2 項はこのとき 0 になることを示そう。この半円上では、 $z = Re^{i\theta} = R(\cos \theta + i \sin \theta)$  と表せるから、

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{izt}}{z^2 + a^2} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{itR \cos \theta - tR \sin \theta}}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} R i e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{-tR \sin \theta}}{R^2 - a^2} R d\theta \leq \int_0^\pi \frac{1}{R^2 - a^2} R d\theta \quad (1.4.16)$$

$$\leq \frac{R\pi}{R^2 - a^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (1.4.17)$$

となる。ここで、

$$|R^2 e^{2\pi i} + a^2| = \sqrt{(R^2 e^{2\pi i} + a^2)(R^2 e^{-2\pi i} + a^2)} = \sqrt{R^4 + 2R^2 a^2 \cos 2\theta + a^4} \geq R^2 - a^2, \quad (1.4.18)$$

および  $0 \leq \sin \theta \leq 1$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) を用いた。したがって、

$$\oint_C \frac{e^{izt}}{z^2 + a^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-at}, \quad (1.4.19)$$

である。次に、被積分関数の分子を Euler の等式を用いて実数部分と純虚数部分に分解すると：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{x^2 + a^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-at}, \quad (1.4.20)$$

となるが、右辺は実数なので左辺の純虚数部分は 0 であり (奇関数を原点对称に積分しているので、積分値が 0 になるのは自明である。)、結局

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-at} \quad (1.4.21)$$

がいえる。さらに、両辺を  $t$  で 1 回微分すれば、

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin tx}{x^2 + a^2} dx = -\pi e^{-at}, \quad (1.4.22)$$

もいえ、 $t \rightarrow 1$  の極限をとれば、求める結果が得られる。

演習 6.1 次の積分値を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1},$$

演習 6.2 次の積分値を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx,$$

1.4.4 Fourier 変換型積分 II

広義積分  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  の値を求めよう。まず、原点を除いた領域における正則関数  $f(z) = e^{iz}/z$  を次の積分路  $C$  で積分する。

$$C = [-R, -\epsilon] \oplus C_\epsilon \oplus [\epsilon, R] \oplus C_R \tag{1.4.23}$$

ここで  $\epsilon \ll 1$  であり、 $C_\epsilon$  および  $C_R$  はそれぞれ半径  $\epsilon, R$  の上半円である。周回路の内部で被積分関数は正則なので  $C$  に沿った積分値は 0 である。次に積分路を以下のように分解する：

$$\oint_C f(z) dz = \int_\epsilon^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz + \int_{-R}^{-\epsilon} f(x) dx + \int_{C_\epsilon} f(z) dz = 0. \tag{1.4.24}$$

実積分の部分を取り出すと、

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx &= \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_R^\epsilon \frac{e^{-ix}}{x} dx \\ &= \int_\epsilon^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned} \tag{1.4.25}$$

であるから、 $\epsilon \rightarrow 0$  および  $R \rightarrow \infty$  のとき、求める積分が現れる。したがって、 $C_R, C_\epsilon$  上の積分値を計算し、極限を求めればよい。

まず、 $C_R$  上の積分値は  $z = Re^{i\theta}$  とおいて、

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} Ri e^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta = i \int_0^\pi e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta} d\theta, \tag{1.4.26}$$

であるから、この積分の絶対値は、

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| &\leq \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \tag{1.4.27}$$

と評価でき、

$$\int_{C_R} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \tag{1.4.28}$$

がわかる。

さらに、被積分関数の極を逆向きに半周する  $C_\epsilon$  に沿った積分値は、 $z = \epsilon e^{i\theta}$  とおいて、

$$\int_{C_\epsilon} f(z) dz = \int_\pi^0 e^{i\epsilon(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -i \int_0^\pi d\theta = -i\pi, \tag{1.4.29}$$

と計算できる。ここから、

$$\lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} 2i \int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x} dx = i\pi \Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \tag{1.4.30}$$

がいえる。

1.4.5 Mellin 変換型積分

非整数べき乗を含んだ関数の定積分を求めよう。特に  $\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) dx, (1 < \alpha < 2)$  のような形の定積分は Mellin 変換型と呼ばれ、様々な場所に顔を出す。特徴的なのは被積分関数は複素正則関数として分岐点をもつことである。例として

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \tag{1.4.31}$$

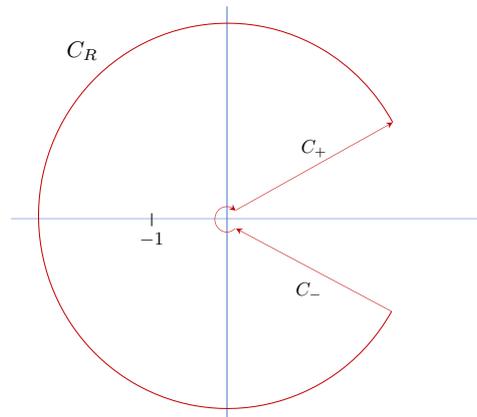
を示そう。

やはり複素正則関数  $f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$  を考えて周回積分を実行するが、 $\alpha$  が整数ではないので  $f(z)$  は  $z = 0$  に分岐点をもつ log 型の多価関数になることに注意が必要である。

$f(z)$  は  $z = -1$  に 1 位の極をもち、留数は

$$\text{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} (1+z)f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} e^{(\alpha-1)\log z} = -e^{\alpha\pi i} \tag{1.4.32}$$

と計算できる。さらに branch cut を原点から  $+\infty$  方向にとることにして、周回積分路を  $C_\varepsilon \oplus C_+ \oplus C_R \oplus C_-$  と選ぶ。ここで各経路は、 $\delta$  を十分小さな正の数として、 $C_\varepsilon$  は原点を中心とする半径  $\varepsilon$  の円周上を偏角  $2\pi - \delta$  から  $\delta$  へ時計回りに回る経路、 $C_R$  は同様に原点中心で半径  $R$  の円周上を逆方向に同じ偏角だけ回るもの、さらに  $C_\pm$  はそれぞれ偏角  $\delta$  および  $2\pi - \delta$  を固定した直線で、絶対値  $\varepsilon$  と  $R$  を結ぶものである。



この周回路は  $z = -1$  を取り囲むので留数を拾い、 $\oint_C f(z) dz = -2\pi i e^{\alpha\pi i}$  となる。さらに  $\delta \rightarrow 0$  とすれば  $C_\pm$  は正の実軸上の積分とみなすことができるが、それぞれ branch cut の両側を走る経路なので積分値に違いが出る。最後に  $\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$  とすれば求める積分値が得られる。

演習 7.1 次の積分公式を示せ。

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(倍角公式を使って  $\sin^2 x$  を  $\cos 2x$  で表し、 $\frac{1 - e^{2iz}}{2z^2}$  の積分を考える。)

## 1.5 Γ-関数、B-関数

### 1.5.1 Γ-関数

与えられた自然数  $n$  に対して  $n! := n(n-1)\dots 2 \cdot 1$  を  $n$  の階乗 (factorial) と言う。この積は場合の数の計算などに頻出し、応用上たいへん重要である。なお便宜上  $0! = 1$  と定義する<sup>1</sup>。

さて、この自然数の階乗を実数あるいは複素数の階乗に一般化したい。実はそのような数を定義しておく、今後の物理学の考察にとっても有用なのである。まずは  $n \geq 2$  として次の定積分を考える。部分積分を繰り返せば

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt &= \underbrace{-t^{n-1} e^{-t}}_{=0} \Big|_0^\infty + (n-1) \int_0^\infty t^{n-2} e^{-t} dt \\ &= (n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} dt}_{=1} = (n-1)! \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

がわかる。なお  $n = 1$  のときは部分積分不要で  $\int_0^\infty e^{-t} dt = 1 = 0!$  と書けるから、この定積分公式は  $n \geq 1$  で有効である。

ところで、この左辺で  $n \rightarrow x > 0$  におきかえた  $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$  を考えると、定積分は  $x > 0$  で収束することが示せる。特に  $x = n (\geq 1)$  の場合、 $\Gamma(n) = (n-1)!$  であるから、 $\Gamma(x)$  は階乗の  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  への一般化と考えて良いだろう。実際、先ほどの部分積分から  $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$  ( $\Leftrightarrow \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ) が成り立ち、これは階乗のもつべき性質  $n! = n \cdot (n-1)!$  を再現している。このように一般化された階乗  $\Gamma(x)$  は  $\Gamma$ -関数と呼ばれ、物理学の様々な場面で顔を出す。

なじみ深い定積分の値はしばしば  $\Gamma$ -関数の特殊値によって与えられる。

**例：**

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad (1.5.2)$$

ここで  $x^2 = t$  のような変数変換を行なった。ところで、左辺は Gauss 積分の半分であるから  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$  であり、 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  がわかる。この特殊値はのちに別の方法で示す。

**Gauss の積公式**  $\Gamma$ -関数の表示として、次の Gauss の積公式

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad (1.5.3)$$

が成立する。

$\therefore$  積分  $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$  を考える。ここで  $s = t/n$  とおけば、

$$\int_0^1 (1-s)^n n^{x-1} s^{x-1} n ds = n^x \underbrace{\int_0^1 (1-s)^n s^{x-1} ds}_{=: I(x,n)} \quad (1.5.4)$$

<sup>1</sup>自然数が 0 から始まるか 1 から始まるかという、きのこたけのこ論争のような問題には立ち入らないことにする。

となるが、 $I(x, n)$  は部分積分をくり返せば

$$I(x, n) = \underbrace{(1-s)^n \frac{s^x}{x}}_{=0} \Big|_0^1 + \frac{n}{x} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^x ds = \frac{n}{x} I(x+1, n-1) = \frac{n(n-1)}{x(x+1)} I(x+2, n-2) \\ = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} I(x+n, 0) \quad (1.5.5)$$

となる。一方、 $I(x+n, 0) = \int_0^1 s^{x+n-1} ds = \frac{1}{x+n} s^{x+n} \Big|_0^1 = \frac{1}{x+n}$  であるから、

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad (1.5.6)$$

が示せた。ここで  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$  に注意して、両辺の  $n \rightarrow \infty$  極限をとれば、Gauss の積公式が示される。

**Weierstrass の公式** さらに次の Weierstrass の公式が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-x \log n} x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})-x \log n} \frac{x \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{x}{k}\right)}{e^x e^{x/2} \cdots e^{x/n}} = e^{x\gamma} x \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+\frac{x}{k}}{e^{x/k}} \quad (1.5.7)$$

ここで  $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \log n \right\} \simeq 0.5772 \cdots$  は Euler 定数である。

### 1.5.2 B-関数

次の定積分  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$  を  $B$ -積分または  $B$ -関数という<sup>2</sup>。この  $B$ -積分は  $\Gamma$ -関数により、 $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$  と表せる。

∴) 部分積分により

$$B(x, y+1) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt = \frac{t^x}{x} (1-t)^y \Big|_0^1 + \frac{y}{x} \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt = \frac{y}{x} B(x+1, y) \quad (1.5.8)$$

となるが、一方

$$B(x, y+1) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)(1-t)^{y-1} dt = B(x, y) - B(x+1, y) = B(x, y) - \frac{x}{y} B(x, y+1) \quad (1.5.9)$$

であるから、 $\frac{x+y}{y} B(x, y+1) = B(x, y)$  がいえる。これを繰り返せば

$$B(x, y) = \frac{x+y}{y} B(x, y+1) = \frac{x+y}{y} \frac{x+y+1}{y+1} B(x, y+2) \\ = \frac{(x+y)\cdots(x+y+n)}{y\cdots(y+n)} B(x, y+n+1) \quad (1.5.10)$$

<sup>2</sup> $\Gamma$ -関数、 $B$ -関数があるのなら  $A$ (アルファ)-関数があるのか? という疑問は数学史永遠の謎の一つとして知られている w。

となる。ここで、 $t = s/n$  と変数変換すれば

$$B(x, y + n + 1) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y+n} dt = \frac{1}{n^x} \int_0^n s^{x-1} \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{n+y} ds \quad (1.5.11)$$

だから、

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \frac{(x+y) \cdots (x+y+n) n^y n!}{y \cdots (y+n) n^{x+y} n!} \int_0^n s^{x-1} \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{n+y} ds \\ &= \frac{n^y n!}{y \cdots (y+n)} \frac{(x+y) \cdots (x+y+n)}{n^{x+y} n!} \int_0^n s^{x-1} \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{n+y} ds \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

がわかり、右辺で  $n \rightarrow \infty$  の極限をとればよい。

いろいろな場面で重要な定積分の値は、やはり  $B$ -関数で与えられることも多い。

例：

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{-1/2} dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \quad (1.5.13)$$

であるが、 $t = \sin^2 \theta$  とおけば

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi \quad (1.5.14)$$

がわかる。ところで、 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi$  なので、再び  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  が示せた。

## 演習課題 8

演習 8.1 次の関数値を求めよ。

(1)  $\Gamma(3/2)/\Gamma(7/2)$

(2)  $B(5, 3)$

(3)  $B(5/2, 3/2)$

演習 8.2 次の定積分を  $\Gamma$  関数で表せ。また、積分値が既知の数によって具体的に求まるならばそれを求めよ。

(1)  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$

(2)  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$

(3)  $\int_0^\infty e^{-t^3} dt$

1.5.3  $\Gamma$ -関数のいろいろな性質

$\Gamma$ -関数は定義により (i)  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , (ii)  $\Gamma(1) = 1$  をみたすが、さらに (iii)  $(\log \Gamma(x))'' \geq 0$ 、つまり凸関数であることを示すことができる。実は、これら 3 つの性質をもつ関数は  $\Gamma$ -関数に限られることが知られている (Bohr-Mollerup の定理)。

Gauss の公式  $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$  から、 $\Gamma(x)$  は  $x = -n$  で 1 位の極をもつことがわかる。また、そのときの留数は  $(-1)^n/n!$  である。

$\therefore$ )

$$(x+n)\Gamma(x) = \frac{(x+n)(x+n-1)\cdots x}{(x+n-1)\cdots x}\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{(x+n-1)\cdots x}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow -n} \frac{\Gamma(1)}{(-1)(-2)\cdots(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \tag{1.5.15}$$

**相補公式** 相補公式と呼ばれる

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \tag{1.5.16}$$

が成立する。ここで  $x = 1/2$  とすれば再び  $\Gamma(1/2)^2 = \pi$  がわかる。

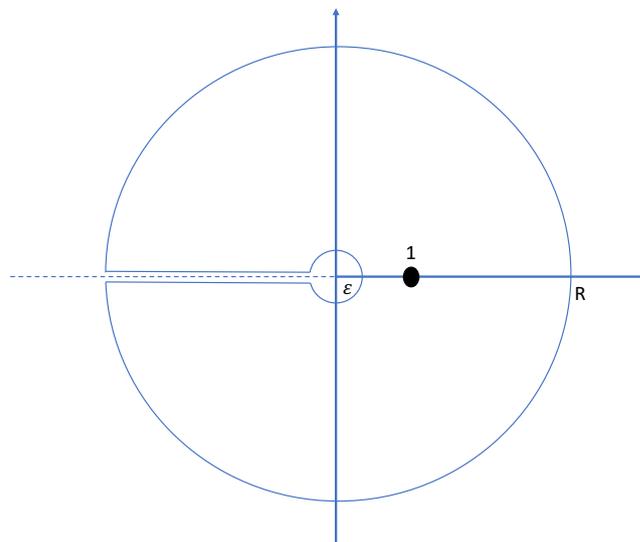
$\therefore$ )  $B$ -積分において変数変換  $t = \frac{s}{s+1}$  を行くと、

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(s+1)^{x-1}} \frac{1}{(s+1)^{y-1}} \frac{ds}{(s+1)^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(s+1)^{x+y}} ds \tag{1.5.17}$$

となるので、 $B(x,1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{s+1} ds$  を評価する。

補助的な多価関数  $\frac{z^{x-1}}{1-z}$  を考える。この関数は  $x$  が非整数の場合に原点に分岐点をもつので、branch cut を負の実軸にとって 1 価正則関数とみなし、周回積分する。



積分路は図のように、原点を中心にもつ半径  $R$  の円周  $C_R$ 、 $\varepsilon$  の円周  $C_\varepsilon$ 、および負の実軸の上下を往復するものとする。この積分値は留数定理により  $z = 1$  の留数を拾い  $\oint_C \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = -2\pi i$  となる。各円周上の積分値は  $R \rightarrow \infty$  と  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限で 0 となること、および負の実軸上下を往復する積分値が評価すべき積分になることを利用すると、 $-2\pi i = -2i \sin \pi x \Gamma(x)\Gamma(1-x)$  が示せる。

相補公式と Weierstrass の公式を用いれば

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \tag{1.5.18}$$

が示せる。これは  $\sin$  関数の因数分解であり Euler の公式と呼ばれる。

**Stirling の公式** 統計力学等において、大きい数の階乗  $\lim_{n \rightarrow \infty} n!$  を近似したい場合がある<sup>3</sup>。これを与えるのが次の Stirling の公式

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma(x) \simeq \sqrt{2\pi x} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \tag{1.5.19}$$

である。以下ではこれを導出しよう。

$\therefore$   $\Gamma(x+1)$  の極限形を求めるために、定義式を

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \int_0^{\infty} e^{-t+x \log t} dt \tag{1.5.20}$$

と書き直せば、被積分関数の  $e^{-\phi(t)}$  は  $\phi(t)$  の最小値近傍だけで値をもつと考えられる。この最小値を与えるのは  $t = x$  であり、この点で Taylor 展開すれば

$$\phi(t) \simeq \phi(x) + \frac{1}{2}(t-x)^2 \phi''(x) = x - x \log x + \frac{1}{2}(t-x)^2 \frac{1}{x} \tag{1.5.21}$$

なので

$$\int_0^{\infty} e^{-t+x \log t} dt \simeq e^{-x(1-\log x)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}} dt \tag{1.5.22}$$

となる。積分値は Gauss 積分の値で近似すれば、

$$\Gamma(x+1) \simeq e^{x(\log x - 1)} \sqrt{2\pi x} = \sqrt{2\pi x} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} \tag{1.5.23}$$

が得られる。したがって、 $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x = \sqrt{2\pi x} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} =: \Gamma_{\text{Stir}}(x)$  が導かれた。

実際に  $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma_{\text{Stir}}(x)} \simeq 1 + \varepsilon$  とすれば  $x = 50$  のとき  $\varepsilon \sim 1.6 \times 10^{-3}$ 、 $x = 50000$  のとき  $\varepsilon \sim 1.6 \times 10^{-6}$  程度である。

<sup>3</sup> $\lim_{n \rightarrow \infty} n!$  は無限大じゃないか! と思っはいけない。どんな割合で無限大になっていくのかを問題にしているのである。

## 演習課題 9

演習 9.1 次の等式が成り立つことを示せ。

$$(1) \Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x}$$

$$(2) \prod_{n=1}^8 \Gamma\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{640}{3^6} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^3$$

演習 9.2  $\sin$  関数の無限乗積表示 (因数分解)

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

が成立することを示せ。

## 2 1 階連立微分方程式

独立変数を  $x$  あるいは  $t$  とする  $n$  個の従属変数  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  についての 1 階連立微分方程式

$$\begin{aligned} y_1' &= F_1(y_1, \dots, y_n; f_1) \\ y_2' &= F_2(y_1, \dots, y_n; f_2) \\ &\vdots \\ y_n' &= F_n(y_1, \dots, y_n; f_n) \end{aligned} \quad (2.0.1)$$

を考える。ここで、 $F_1, \dots, F_n$  と  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  は与えられた既知関数である。特に、右辺が  $y_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, n$  について線形である場合、この方程式は

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + f_1 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + f_2 \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + f_n \end{aligned} \quad (2.0.2)$$

のようになり、この形の方程式を 1 階線形連立微分方程式と呼ぶ。特に従属変数の数を強調したい場合には、 $n$  元 1 階線形連立微分方程式と呼ぶ場合も多い。特に各係数  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  が定数の場合には定数係数 1 階線形連立方程式と呼ぶ。また、 $f_j(x) \neq 0$  のとき非同次型、 $f_j(x) = 0$  のとき同次型と呼ぶのは通常の微分方程式の場合と同様である。のちに考えるように、線形連立微分方程式は系の安定性の解析等において一般に重要である

以後、記述を簡潔にするために行列表記を導入する場合がある。 $y_j(x)$  および  $f_j(x)$  を縦に並べたベクトル

$$\mathbf{y} = {}^t(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)), \quad \mathbf{f} = {}^t(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \quad (2.0.3)$$

と、係数  $a_{ij}$  を成分にもつ行列  $A$  を用いれば、1 階線形連立微分方程式は

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f} \quad (2.0.4)$$

のように書くことができる。この行列  $A$  を係数行列と呼ぶ。

この講義では 1 階の連立微分方程式の解法について考察するが、高階の線形微分方程式は 1 階の連立微分方程式に書き直すことができることを注意しておく。

**例：** 2 階の線形微分方程式  $q'' + q = 0$  は、新たな変数  $p = q'$  を導入すれば、 $q' = p$ ,  $p' = -q$  と  $q, p$  についての連立微分方程式に書き直すことができる。

一般に、高階の線形微分方程式

$$f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + a_2f'' + a_1f' + a_0f = g \quad (2.0.5)$$

は、 $y_1 = f$ ,  $y_2 = f'$ ,  $\dots$ ,  $y_n = f^{(n)}$  とおけば

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_n' &= -a_0y_1 - a_1y_2 - \dots - a_{n-1}y_n + g \end{aligned} \quad (2.0.6)$$

のように連立微分方程式の形に書くことができる。ここからわかるように、 $n$  元線形連立微分方程式は  $n$  階の微分方程式と見ることができる。

## 2.1 1 階線形・定数係数・同次型

定数係数の同次型連立微分方程式  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  の解法を考える。通常の（非連立）1 階線形微分方程式からの類推により、この方程式の解が  $\mathbf{y} = Ce^{\lambda x}\mathbf{v}$  のような形であると仮定してみよう。ここで、 $C$  は定数、 $\mathbf{v}$  は  $x$  によらない定数ベクトルである。両辺を微分すれば  $\mathbf{y}' = \lambda Ce^{\lambda x}\mathbf{v}$  であり、一方  $\mathbf{v}$  が行列  $A$  の固有値  $\lambda$  に属する固有ベクトルであれば  $A\mathbf{y} = Ce^{\lambda x}A\mathbf{v} = Ce^{\lambda x}\lambda\mathbf{v} = \lambda Ce^{\lambda x}\mathbf{v}$  となるので、方程式は満たされることがわかる。したがって、問題は係数行列  $A$  の固有値問題に帰着されるが、固有値に縮退がある場合とない場合では解に質的な違いがあるので、それぞれの場合に分けて考えよう。

### 2.1.1 固有値に縮退のない場合

まず、係数行列の固有値に縮退がない場合を考えよう。この場合、連立微分方程式  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  の一般解、つまり微分の階数  $n$  だけ任意定数をもつ解は

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n C_j e^{\lambda_j x} \mathbf{v}_j \quad (2.1.1)$$

で与えられることが示せる。ここで  $\lambda_j$  および  $\mathbf{v}_j$  は  $n$  次正方行列  $A$  の  $n$  個の相異なる固有値および固有ベクトルであり、 $C_j$  は  $n$  個の任意定数である。つまり、一般解は係数行列の各固有値に属する固有ベクトルの「方向」を向いた解たちの線形結合である。さらに、 $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  の初期条件  $\mathbf{y}(0) =: \mathbf{y}_0$  を満たす特解はただ一つ存在することも示すことができる（解の一意性）。これらの証明は別の機会に譲り、ここでは与えられた方程式をどのように解くかを考えることにしよう。

**解法** 与えられた方程式  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  に対して、係数行列  $A$  を対角化する：

$$AP = PD, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1}AP = D \quad (2.1.2)$$

ここで、 $P$  は各固有値  $\lambda_j$  に属する固有ベクトルを順番に並べた行列である。この  $P$  を用いれば

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \Leftrightarrow P^{-1}\mathbf{y}' = P^{-1}APP^{-1}\mathbf{y} = D(P^{-1}\mathbf{y}) \quad (2.1.3)$$

となり、 $\mathbf{z} := P^{-1}\mathbf{y}$  とおけば、与えられた方程式は

$$\mathbf{z}' = D\mathbf{z} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \vdots \\ \lambda_n z_n \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

と変形できる。最後に現れたのは  $n$  個の 1 階線形微分方程式  $z'_j = \lambda_j z_j$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) であり、これは簡単に解けて  $\mathbf{z}$  が得られる。したがって、 $\mathbf{y} = P\mathbf{z}$  のように解が得られる。

**例：** 連立微分方程式  $\begin{cases} y'_1 = y_1 - y_2 \\ y'_2 = 2y_1 + 4y_2 \end{cases}$  の一般解、および初期条件  $y_1(0) = 1, y_2(0) = 3$  を満たす特解を求める。

係数行列は  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  なので、これを対角化する。特性方程式は  $|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

なので、固有値は  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$  である。それぞれの固有値に属する固有ベクトルは  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  およ

び  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  のように求まるので

$$AP = PD \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_P = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} 2 & \\ & 3 \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

および  $P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  がわかる。したがって、元の方程式は

$$z' = Dz \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_1 \\ 3z_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.6)$$

と等価であり、これは簡単に  $\begin{cases} z_1 = C_1 e^{2x} \\ z_2 = C_2 e^{3x} \end{cases}$  と解くことができる。元の変数  $y$  に戻せば、

$$y = Pz \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (2.1.7)$$

のように一般解が求まる。

次に特解を求める。初期条件  $y_1(0) = 1, y_2(0) = 3$  を代入すれば、

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 - 2C_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = -4 \end{cases} \quad (2.1.8)$$

がわかり、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 5e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 4e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e^{2x} - 4e^{3x} \\ -5e^{2x} + 8e^{3x} \end{pmatrix} \quad (2.1.9)$$

のように特解が求まる。

係数行列  $A$  の固有値に縮退がない場合の 1 階線形連立微分方程式は、変数の個数にかかわらず以上のように解くことができる。なお、一般に係数行列の固有値は複素数値を取るため、解は実数値になるとは限らない。ただし、例のような 2 変数方程式のとき、2 つの固有値が互いに共役複素数になる場合には実数解がありうる（演習問題参照）。

## 演習課題 10

演習 10.1 次の連立常微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \begin{cases} y_1' = 4y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y_1' = 5y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -4y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y_1' = 7y_1 - y_2 + 6y_3 \\ y_2' = -10y_1 + 4y_2 - 12y_3 \\ y_3' = -2y_1 + y_2 - y_3 \end{cases}$$

演習 10.2 次の連立微分方程式を、与えられた初期条件の下で解け。

$$(1) \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = 4y_1 + y_2 \end{cases}, \quad y_1(0) = 2, y_2(0) = 3$$

$$(2) \begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + 2y_3 \\ y_2' = -y_2 \\ y_3' = -y_2 - 2y_3 \end{cases}, \quad y_1(0) = -2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 3$$

## 2.1.2 固有値に縮退のある場合

よく知られているように、どのような正方行列も必ず対角化できるとは限らない。

例えば、すでにほぼ対角化された係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix} \quad (2.1.10)$$

に対して、方程式  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  を考えると、 $A$  の固有値は  $\lambda_1 = 1$  と  $\lambda_2 = 2$  であり、対応する固有ベクトルは  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  と  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  だけなので、対角化の手続きはこれ以上実行不可能である。また、とりあえず

得られる解は  $\mathbf{y} = C_1 e^x \mathbf{v}_1 + C_2 e^{2x} \mathbf{v}_2$  である。方程式は 3 次なので、もうひとつ「独立」な解があるはずだが、それをどのように探せばよいただろう？

このように、係数行列の固有値に縮退がある場合には、対応した微分方程式の解法にも修正が必要である

**準備：Jordan 標準形** 3 角行列を「標準化」する。つまり、対角化できないまでも、なるべく扱いやすい形に変形することを考える

**例：**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$  の「対角化」を考えると。特性方程式は

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -4 \\ 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \quad (2.1.11)$$

したがって、固有値は  $\lambda = -1$  で最初の例と同様に 2 重縮退していて、固有ベクトルを求めると

$$A\mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}_0 \Leftrightarrow (A + E)\mathbf{v}_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \quad (2.1.12)$$

となり、規格化定数の選び方を除いて  $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  のように定まる。固有ベクトルはこの  $\mathbf{v}_0$  だけで、対角化不可能だから、もう一つの独立なベクトル  $\mathbf{v}_1$  を見つけて標準化することを考える。固有ベクトルの定義  $(A + E)\mathbf{v}_0 = 0$  からの類推で  $(A + E)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0$  であるような  $\mathbf{v}_1$  を探そう。<sup>4</sup>

$$(A + E)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a - 2b = 1 \quad (2.1.13)$$

であるから、例えば  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  ととれる。この  $\mathbf{v}_1$  を行列  $A$  の固有値  $-1$  に属する「一般固有ベクトル」と呼ぶことにする。さて、定義より  $A\mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}_0$  および  $A\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0$  である。これらの関係式を行列表記すれば、

$$A \underbrace{(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)}_P = \underbrace{(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)}_P \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1.14)$$

<sup>4</sup>なぜこのように  $\mathbf{v}_1$  を定義するかという点、両辺に  $A + E$  をかけると  $(A + E)^2 \mathbf{v}_1 = (A + E)\mathbf{v}_0 = 0$  となるが、計算してみるとわかるように  $(A + E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  であり、矛盾が生じないから。もっと詳しい理由を後で述べる。

$v_1$  は明らかに  $v_0$  と独立だから、これら 2 本のベクトルを並べた  $P$  は正則行列であり、 $A$  は 3 角行列  $J := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  と相似 ( $P^{-1}AP = J$ ) であることがいえた。

一般に、 $k$  次正方行列

$$J(\lambda, k) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \quad (2.1.15)$$

を Jordan block (Jordan 細胞) と呼ぶことにすると<sup>5</sup>、任意の正方行列  $A$  は、これらをブロック対角に並べた

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, k_1) & & \\ & J(\lambda_2, k_2) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.1.16)$$

に相似変形可能であることが示せる。この  $J$  のような行列を Jordan 標準形という。今示した例では  $J$  がただ一つの Jordan block  $J(-1, 2)$  だけから成っていたのであった。<sup>6</sup>

Jordan 標準形を利用して、方程式  $y' = Ay$  を解くことを考える。まず、指数関数の Taylor 展開を用いて行列の指数関数を

$$e^{Ax} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n A^n \quad (2.1.17)$$

と定義すれば、この方程式の形式的な解がある定数ベクトル  $v \neq 0$  を用いて  $y = e^{Ax}v$  と書けることに注目する。実際、

$$\begin{aligned} y' &= \left( E + xA + \frac{1}{2!}x^2A^2 + \dots \right)' v = \left( A + xA^2 + \frac{1}{2!}x^2A^3 + \dots \right) v \\ &= A \left( E + xA + \frac{1}{2!}x^2A^2 + \dots \right) v = Ay \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

のように方程式は満たされている<sup>7</sup>。次に、 $A$  と単位行列  $E$  の可換性により、ある  $\lambda$  に対して  $e^{Ax} = e^{E\lambda x}e^{-E\lambda x}e^{Ax} = e^{\lambda x}Ee^{(A-\lambda E)x} = e^{\lambda x}e^{(A-\lambda E)x}$  が成り立つから、形式解は

$$y = e^{\lambda x}e^{(A-\lambda E)x}v = e^{\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n (A - \lambda E)^n v \quad (2.1.19)$$

と変形することができる。

ここで先ほどの例に戻ろう。型式解において、適切なベクトル  $v$  を選べば行列の無限級数は有限項で途切れ、具体的な解を与えるはずである。先ほどの考察により、これには 2 重縮退した固有値  $\lambda = -1$  の固有ベクトルおよび一般固有ベクトルを利用できる。

(i)  $v$  として、固有ベクトル  $v_0$  をとれば  $(A - \lambda E)v_0 = 0$  であるから、この場合の解を  $y_0$  とすれば、

$$y_0 = e^{\lambda x} (E + x(A - \lambda E) + \dots) v_0 = e^{\lambda x} v_0 \quad (2.1.20)$$

が得られる。

<sup>5</sup> $k = 1$  の場合  $J(\lambda, 1) = (\lambda)$  と定義する。

<sup>6</sup>対角化可能な行列とは、すべての Jordan block において  $k_j = 1$  であるような  $J$  と相似な場合に他ならない。

<sup>7</sup> $A$  が対角化可能な場合には実際これが前節のような解の具体的表示を与える。

(ii)  $\mathbf{v}$  として、一般固有ベクトル  $\mathbf{v}_1$  をとれば、 $(A - \lambda E)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0$  および  $(A - \lambda E)^2\mathbf{v}_1 = 0$  であるから、この場合の解を  $\mathbf{y}_1$  とすれば、

$$\mathbf{y}_1 = e^{\lambda x} \left( E + x(A - \lambda E) + \frac{1}{2!}x^2(A - \lambda E) + \cdots \right) \mathbf{v}_1 = e^{\lambda x} (\mathbf{v}_1 + x\mathbf{v}_0) \quad (2.1.21)$$

が得られる。

$\mathbf{y}_0$  と  $\mathbf{y}_1$  は明らかに独立であるから、一般解は

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= C_0\mathbf{y}_0 + C_1\mathbf{y}_1 = C_0e^{-x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1e^{-x} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= e^{-x} \left\{ (C_0 + C_1x) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

のように求まる。

より一般に、微分の階数  $n$  が大きいとき、つまり  $A$  の次数が大きいときには、固有値の縮退度も大きい場合が生じる。このようなときに一般固有ベクトルは

$$(A - \lambda E)\mathbf{v}_0 = 0, (A - \lambda E)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0, (A - \lambda E)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1, \dots \quad (2.1.23)$$

のように定義されるが、これは

$$(A - \lambda E)\mathbf{v}_0 = 0, (A - \lambda E)^2\mathbf{v}_1 = 0, (A - \lambda E)^3\mathbf{v}_2 = 0, \dots \quad (2.1.24)$$

と等価であり、ある  $k$  に対して  $(A - \lambda E)^k\mathbf{v}_{k-1} = 0$  であれば先ほどの解法が適用できる。

実は、任意の正方行列  $A$  は  $A = S + N$  のような分解が可能であることが知られている。ここで、 $S$  は対角行列に相似な行列、 $N$  はある  $k$  に対して  $N^k = 0$  を満たす行列であり、前者を半単純行列、後者をベキ零行列という。したがって、 $(A - \lambda E)^k = 0$  となる  $k$  は必ず存在するから、この手続きにより固有値に縮退がある場合の解法が確立できた。

## 演習課題 11

演習 11.1 次の連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y_1' = -y_2 + y_3 \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2 + y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 - y_3 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' = -3y_1 + 2y_2 + 4y_3 \end{cases}$$

演習 11.2 次の連立微分方程式を、与えられた初期条件の下で解け。

$$(1) \begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 + 2y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 4y_3 \end{cases}, \quad y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0$$

$$(2) \begin{cases} y_1' = 3y_1 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3 \\ y_3' = 3y_3 \\ y_4' = 2y_3 + 3y_4 \end{cases}, \quad y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 1, y_4(0) = 1$$

## 2.2 1 階線形・定数係数・非同次型

非同次項をもつ方程式  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}$  の解法を考える。ここで  $\mathbf{f} = {}^t(f_1(x), \dots, f_n(x))$  は  $n$  個の既知関数からなるベクトルである。

### 2.2.1 定数変化法

非同次型の 1 階線形微分方程式の解法においては、定数変化法が有用であった。連立微分方程式の場合にも、まずはこの方法を適用してみよう。

例： 連立微分方程式

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + e^x \\ y_2' = 2y_1 + 4y_2 + e^{2x} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

の一般解、および初期条件  $y_1(0) = y_2(0) = 0$  をみたく特解を求める。

まず、同次型の方程式のときと同様に係数行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  を対角化する。 $A$  の固有値は  $\lambda_1 = 2$  および  $\lambda_2 = 3$  であり、それぞれに属する固有ベクトルは  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  および  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  のようにとることができる。したがって、行列  $P := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  および  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  を用いて、係数行列  $A$  は  $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  と対角化できる。いつものように  $\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 、さらに非同次項からなるベクトルを  $\mathbf{f} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  と定義すれば、方程式は

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f} \Leftrightarrow P^{-1}\mathbf{y}' = P^{-1}APP^{-1}\mathbf{y} + P^{-1}\mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{z}' = D\mathbf{z} + P^{-1}\mathbf{f} \quad (2.2.2)$$

と変形できる。ここで、 $P^{-1}\mathbf{y} =: \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  また、 $P^{-1}\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 2e^x + e^{2x} \\ -e^x - e^{2x} \end{pmatrix}$  である。したがって、解くべき方程式は

$$\begin{cases} z_1' = 2z_1 + 2e^x + e^{2x} \\ z_2' = 3z_2 - e^x - e^{2x} \end{cases} \quad (2.2.3)$$

に帰着する。同次方程式の一般解は 2 個の任意定数を用いて  $z_1 = C_1e^{2x}$ ,  $z_2 = C_2e^{3x}$  で与えられるから、定数変化法を適用して非同次方程式の一般解を求めよう。いつものように  $C_1, C_2$  を  $x$  の関数とみなして、方程式に代入すれば、

$$\begin{cases} C_1'e^{2x} = 2e^x + e^{2x} \\ C_2'e^{3x} = -e^x - e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = 2e^{-x} + 1 \\ C_2' = -e^{-2x} - e^{-x} \end{cases} \quad (2.2.4)$$

が得られる。これは容易に積分できて、

$$\begin{cases} C_1 = -2e^{-x} + x + \tilde{C}_1 \\ C_2 = \frac{1}{2}e^{-2x} + e^{-x} + \tilde{C}_2 \end{cases} \quad (2.2.5)$$

のように関数  $C_1, C_2$  が求まる。ここで  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  は新たな積分定数である。こうして、 $\mathbf{z}$  についての一般解は

$$\begin{cases} z_1 = C_1e^{2x} - 2e^x + xe^{2x} \\ z_2 = C_2e^{3x} + \frac{1}{2}e^x + e^{2x} \end{cases} \quad (2.2.6)$$

であることが分かった。ここで積分定数は改めて  $C_1, C_2$  と書いた。

次に初期条件を満たす特解を求めよう。条件  $y_1(0) = y_2(0)$  は  $z_1(0) = z_2(0) = 0$  に等価であるから、 $z_1(0) = C_1 - 2 = 0$  および  $z_2(0) = C_2 + \frac{3}{2} = 0$  がわかり、初期条件を満たす特解は

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+x)e^{2x} - 2e^x \\ -\frac{3}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^x + e^{2x} \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

であることがわかる。もとの  $y_1, y_2$  に戻せば、特解は

$$\mathbf{y} = P\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ -z_1 - 2z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}e^{3x} + (3+x)e^{2x} - \frac{3}{2}e^x \\ 3e^{3x} + (-4-x)e^{2x} + e^x \end{pmatrix} \quad (2.2.8)$$

であることがわかった。

以上のように定数変化法が機能することが確かめられたが、方程式の階数が大きい場合に備えて、もう少し系統的な方法を準備しておくことにしよう。

### 2.2.2 基本行列解

同次方程式  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  の独立な解を、 $\mathbf{y}_j = e^{\lambda_j x} \mathbf{v}_j$  とする。ここで  $A$  の固有値を  $\lambda_j$ 、およびそれらに属する固有ベクトルを  $\mathbf{v}_j$  とした。当面、固有値に縮退はないとする。前節までに見たように同次方程式の一般解は

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{y}_1 + C_2 \mathbf{y}_2 + \cdots + C_n \mathbf{y}_n = \underbrace{(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)}_{X(x)} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \quad (2.2.9)$$

のように書くことができる。ここで  $X(x)$  は独立解を並べた  $n \times n$  行列であり、基本行列解と呼ばれる。

例えば、 $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  ならば、

$$\mathbf{y}_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = e^{3x} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = e^{5x} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (2.2.10)$$

であるから、これらを並べて  $X(x) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$  とすればよい。

さて、同次方程式の形式解に現れる行列  $e^{Ax}$  は、基本行列解  $X(x)$  によって

$$e^{Ax} = X(x)X^{-1}(0) \quad (2.2.11)$$

と表されることが示せる。これは以降の考察で用いるので証明しておくことにしよう。 $X(x)$  の各列  $\mathbf{y}_j$  はそれぞれ独立な解であるから、 $\mathbf{y}'_j = A\mathbf{y}_j$  をみたすことは明らかなので、

$$X'(x) = (\mathbf{y}'_1, \dots, \mathbf{y}'_n) = (A\mathbf{y}_1, \dots, A\mathbf{y}_n) = A(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = AX(x) \quad (2.2.12)$$

が成り立つ。したがって、行列  $X(x)$  は微分方程式  $X'(x) = AX(x)$  の解行列である。さらに

$$X(0) = (\mathbf{y}_1(0), \dots, \mathbf{y}_n(0)) \quad (2.2.13)$$

であるが、各  $\mathbf{y}_j(0)$  は異なる固有値に属する固有ベクトルであるから独立であり、 $|X(0)| \neq 0$  がわかる。したがって、 $X(0)$  には逆行列  $X(0)^{-1}$  が存在する。一方、以前に見たように行列  $e^{Ax}$  は微分方程式

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = A e^{Ax} \quad (2.2.14)$$

をみたすので、これもやはり  $X'(x) = AX(x)$  の基本行列解にとることができる。さて、2つの基本行列解  $X(x)$  と  $\tilde{X}(x)$  は、ある定数行列  $C$  によって  $\tilde{X}(x) = X(x)C$  のような関係にある。なぜなら、 $\tilde{X}(x)$  の各列ベクトルはやはり独立であるから、その各列は線形結合  $\tilde{\mathbf{y}}_j = c_{1j}\mathbf{y}_1 + c_{2j}\mathbf{y}_2 + \cdots + c_{jn}\mathbf{y}_n$  になっている。こうして、

$$\tilde{X}(x) = (\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_n) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}}_{=:C} = X(x)C \quad (2.2.15)$$

がわかる。以上により、一般に  $e^{Ax} = X(x)C$  のような関係が成立することがわかった。ここで  $x = 0$  とおいてみると  $E = X(0)C \Leftrightarrow C = X^{-1}(0)$  となり、示すべき関係式が成立することがわかる。

## 演習課題 12

演習 12.1 次の連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2 + e^{2x} \\ y_2' = -4y_1 + 3y_2 + e^{-x} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y_1' = y_2 + \cos 2x \\ y_2' = -y_1 + \sin 2x \end{cases}$$

演習 12.2 次の連立微分方程式を、与えられた初期条件の下で解け。

$$(1) \begin{cases} y_1' = 6y_1 - y_2 + e^{-x} \\ y_2' = 8y_1 - 3y_2 \end{cases}, y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$$

演習 12.3  $2 \times 2$  行列  $A$  を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。ただし  $a$  は正の定数とする。このとき、 $2 \times 2$  行列  $M(x)$  についての微分方程式  $M' = AM$  を、初期条件  $M(0) = E$  (単位行列) のもとで解け。

基本行列解  $X(x)$  を用いて、非同次方程式を解くことを考えよう。解くべき方程式は、 $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}_j + \mathbf{f}$  のようなものであり、非同次項を  $\mathbf{f} = {}^t(f_1(x), \dots, f_n(x))$  と書いている。先ほど見たように、基本行列解を用いれば同次方程式の解は  $\mathbf{y} = X(x)\mathbf{C}$  のように書ける。ここで  $\mathbf{C} := {}^t(C_1, \dots, C_n)$  と定数ベクトルを定義した。さて、定数変化法とは同次方程式の一般解に現れる定数  $C_1, C_2, \dots$  を  $x$  の関数とみなすものであったから、今定義した定数ベクトルに  $x$  依存性を入れた  $\mathbf{C}(x) := (C_1(x), \dots, C_n(x))$  を考えて、解を  $\mathbf{y} = X(x)\mathbf{C}(x)$  のように仮定する。これを非同次方程式に代入すれば、

$$\mathbf{y}' = X'(x)\mathbf{C}(x) + X(x)\mathbf{C}'(x) = AX(x)\mathbf{C}(x) + \mathbf{f}(x) \quad (2.2.16)$$

となるが、基本行列解の定義より  $X'(x) = AX(x)$  だから、 $X(x)\mathbf{C}'(x) = \mathbf{f}$  をみたく  $\mathbf{C}$  によって、非同次方程式は解けることがわかる。このような  $\mathbf{C}(x)$  を求めるために、基本行列解の逆行列を用いれば  $\mathbf{C}'(x) = X^{-1}(x)\mathbf{f}$  となるから、これを積分して

$$\mathbf{C}(x) = \int_0^x X^{-1}(x)\mathbf{f}(s)ds + \mathbf{C}(0) = \int_0^x X^{-1}(x)\mathbf{f}(s)ds + X^{-1}(0)\mathbf{y}(0) \quad (2.2.17)$$

がわかる。ここで  $\mathbf{y}(0) = X(0)\mathbf{C}(0)$  を用いた。また、積分の始点は便宜上  $x = 0$  ととった。

この  $\mathbf{C}(x)$  を用いて非同次方程式の解は

$$\mathbf{y} = X(x)\mathbf{C}(x) = \underbrace{X(x)X^{-1}(0)}_{e^{Ax}}\mathbf{y}(0) + X(x)\int_0^x X^{-1}(x)\mathbf{f}(s)ds \quad (2.2.18)$$

と表せる。次に右辺の第 2 項目を  $e^{Ax}$  をもちいて書き換えることにすると、

$$X(x) = e^{Ax}X(0), (e^{Ax})^{-1} = e^{-Ax} \Leftrightarrow X^{-1}(x) = X^{-1}(0)e^{-Ax} \quad (2.2.19)$$

であるから、

$$\mathbf{y}(x) = e^{Ax}\mathbf{y}(0) + e^{Ax}X(0)\int_0^x X^{-1}(0)e^{-As}\mathbf{f}(s)ds = e^{Ax}\mathbf{y}(0) + e^{Ax}\int_0^x e^{-As}\mathbf{f}(s)ds \quad (2.2.20)$$

のように非同次方程式の解  $\mathbf{y}(x)$  は  $e^{Ax}$  とその積分で書けることがわかる。

**例：** 非同次方程式

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + e^x \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 \end{cases} \quad (2.2.21)$$

の、初期条件  $y_1(0) = y_2(0) = 0$  を満たす特解を求めよう。

係数行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  の固有値と固有ベクトルは、それぞれ  $\lambda_1 = 1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  および  $\lambda_2 = 3, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

となるから、同次方程式の独立解は  $\mathbf{y}_1 = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  および  $\mathbf{y}_2 = e^{3x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  のように書いて、基本行

列解は  $X(z) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \begin{pmatrix} e^x & -e^{3x} \\ e^x & e^{3x} \end{pmatrix}$  であることがわかる。これから  $X(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  および

$X^{-1}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  が得られるから、

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= X(x)X^{-1}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^x & -e^{3x} \\ e^x & e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^x + e^{3x} & e^x - e^{3x} \\ e^x - e^{3x} & e^x + e^{3x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}e^x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{3x} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

のように  $e^{Ax}$  が得られる。次に非同次項ベクトル  $\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}$  を用いれば、

$$e^{-As} \mathbf{f}(s) = \left\{ \frac{1}{2} e^{-s} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{-3s} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{-2s} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.2.23)$$

したがって、

$$\int_0^x e^{-As} \mathbf{f}(s) ds = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left( -\frac{1}{2} \right) (e^{-2x} - 1) \quad (2.2.24)$$

がわかる。また、初期条件より  $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  だから、これらを用いて

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{3x} \\ \frac{1}{2} x e^x + \frac{1}{4} e^x - \frac{1}{4} e^{3x} \end{pmatrix} \quad (2.2.25)$$

が求まる。

## 2.3 定性理論

ここまでは線形の連立微分方程式を考えてきたが、現実の自然現象などをモデル化した方程式は一般に非線形である。したがって、非線形の連立微分方程式を考えることがとても重要になる。ここからは線形とは限らない連立微分方程式  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  を考えよう。当分の間、独立変数は時間を意識して  $t$  を用いることにする。

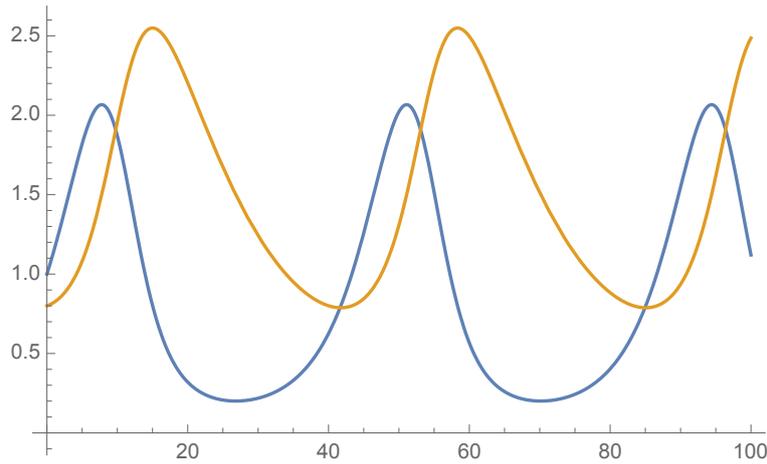
さて、実は非線形微分方程式は線形の場合と異なり、一般によく知っている関数によって解くことはできない。しかし、現実には解の具体的な形はそれほど必要ではない場合も多く、むしろ系に安定な状態が存在するかどうか重要な問題となる。この安定な状態のことを微分方程式の平衡点と呼ぶことにしよう。

**例：Lotka-Volterra 方程式** これは被食者・捕食者の生態系を記述するモデルの中で、最も単純かつ重要な方程式である。 $x(t)$  を被食者密度、 $y(t)$  を捕食者密度とすると、方程式は

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \quad (2.3.1)$$

となる。ここで  $a, b, c, d > 0$  は定数である。第 1 式の右辺は被食者（小魚）の個体数とそのときの個体数に比例して増加すること、捕食者（サメ）数が多いほど減少することを示す。一方第 2 式はサメの個体数が共食いの結果個体数に比例して減少し、小魚が多いほど増加することを示す。図はこの方程式の数値解であり、小魚（青）とサメ（オレンジ）の個体数は安定に振動していることがわかる。それぞれの最大値の位置にずれがあることに注意しよう<sup>8</sup>。

<sup>8</sup>この「位相差」の謎を解こうとしたのがこの方程式研究の発端らしい。



この系の平衡点は  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  で定義されるが、その値は

$$\begin{cases} (a - by)x = 0 \\ (-c + dx)y = 0 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

を満たす点であるから、 $(x, y) = (0, 0)$  および  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) =: (\bar{x}, \bar{y})$  である。平衡点  $(0, 0)$  は自明、つまり小魚もサメも生きていない状況なので、 $(\bar{x}, \bar{y})$  について考える。興味があるのは、この平衡点の安定性である。つまり与えられた  $a, b, c, d$  にたいして  $(\bar{x}, \bar{y})$  は確定するが、この平衡点から少しずれたところから出発したとき  $t \rightarrow \infty$  で  $(x, y)$  がどこに向かうかというところである。もし  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$  である場合、この点を安定な平衡点という。

このような平衡点の安定性の問題は実際重要なので、線型方程式の場合に戻って考えてみよう。

**例：** 強制振動の方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \cos 2t \end{cases} \quad (2.3.3)$$

を考える。線形非同次方程式であるから、一般解

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \cos 2t \\ \frac{2}{3} \sin 2t \end{pmatrix} \quad (2.3.4)$$

はすぐに求まる。

さて、初期条件を与えることにより  $(C_1, C_2)$  が決まり、 $(x(t), y(t))$  の関数形が完全に確定する。したがって、その後の運動は精密に追えるはずであるが、位置や速度の測定には必ず誤差が伴うから、これは  $(C_1, C_2)$  の値を厳密には決められないことを意味する。考えるべきは、このような  $(C_1, C_2)$  の値の「ゆらぎ」が解の長時間の振る舞いにどのような影響を与えるかである。例えば、初期条件  $x(0) = 1, y(0) = \dot{x}(0) = 0$  を考えると、 $(C_1, C_2) = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$  と「確定」し、特解は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \cos t - \frac{1}{3} \cos 2t \\ -\frac{4}{3} \sin t + \frac{2}{3} \sin 2t \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

となる。これを「真の解」と呼ぼう。次に測定誤差に伴い  $C_1, C_2$  の値に  $10^{-4}$  程度のゆらぎが存在するとする。つまり  $\frac{4}{3} - 10^{-4} < C_1 < \frac{4}{3} + 10^{-4}, -10^{-4} < C_2 < 10^{-4}$  であるとする。このとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

は  $\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix}$  に「近い」値を取るだろうか？

これを見るために

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_1 - \frac{4}{3}) \cos t + C_2 \sin t \\ -(C_1 - \frac{4}{3}) \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A \sin(t + \delta_1) \\ B \sin(t + \delta_2) \end{pmatrix} \quad (2.3.6)$$

と置いてみると、

$$\begin{aligned} |A| &= \sqrt{(C_1 - \frac{4}{3})^2 + C_2^2} \leq \sqrt{2} \times 10^{-4} \\ |B| &= \sqrt{(C_1 - \frac{4}{3})^2 + C_2^2} \leq \sqrt{2} \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

がわかる。つまり、初期条件の誤差を含んだ  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  と、「真の解」  $\begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix}$  の差は  $t \rightarrow \infty$  であっても  $10^{-4}$  程度であり、いつまでも近い値を保っていることがわかる。これはこの方程式の「真の解」が初期条件のゆらぎに対して安定性をもつことを示している。

このように、解が揺らぎに対して安定であることは、その数理モデルによって現象を解析する場合の信頼性に関わる重要な性質である。

## 演習課題 13

演習 13.1 次の連立微分方程式の平衡点を全て求めよ。

$$(1) \begin{cases} y_1' = y_1 - y_1^2 - 2y_1y_2 \\ y_2' = -2y_2 - 2y_2^2 - 3y_1y_2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y_1' = y_1y_2^2 - y_1 \\ y_2' = y_1 \sin \pi y_2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y_1' = -1 - y_2 - e^{y_1} \\ y_2' = y_1^2 + y_2(e^{y_1} - 1) \\ y_3' = y_1 + \sin y_3 \end{cases}$$

演習 13.2 次の初期値問題

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1 - y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = 2y_1 - y_2, \quad y_1(0) = y_2(0) = 1$$

の解  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  に対して、 $y_1(0)$ ,  $y_2(0)$  の測定時に誤差が  $10^{-4}$  の精度で生じるとする。 $t > 0$  において  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  を評価するときの最大誤差を求めよ。

平衡点の安定性（不安定性）をどのように判定するかを考える。このためにはまず「安定性」を定義しなければならないが、気持ちとしては「平衡点に近づいた解は近いままを保つ」とすればよい。

### 定義：

- (1) 連立微分方程式  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  の平衡点を  $\mathbf{a}$  とする ( $\Leftrightarrow \mathbf{f}(t, \mathbf{a}) = 0$ )。任意に与えられた  $\varepsilon > 0$  に対して  $\delta > 0$  が存在し、

$$|\mathbf{y}(0) - \mathbf{a}| < \delta \Rightarrow |\mathbf{y}(t) - \mathbf{a}| < \varepsilon \quad (2.3.8)$$

が成り立つとき、平衡点  $\mathbf{a}$  は安定 (Lyapunov 安定) であるという。(これは任意の時刻で  $\mathbf{y}(t)$  が  $\mathbf{a}$  の近くにいるように初期条件を選べるということ。)

- (2) 平衡点  $\mathbf{a}$  に近づいた解が  $t \rightarrow \infty$  で  $\mathbf{a}$  に収束するとき ( $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{a}$ )、平衡点  $\mathbf{a}$  は漸近安定であるという。(明らかに、安定  $\supset$  漸近安定 である。)
- (3) 平衡点  $\mathbf{a}$  が安定でないとき、不安定であるという。

**2次元線形系の平衡点** 安定、あるいは不安定な平衡点にはさまざまな種類がある。ここでは2次元の同次線形系  $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ ,  $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$  の平衡点を分類してみよう。

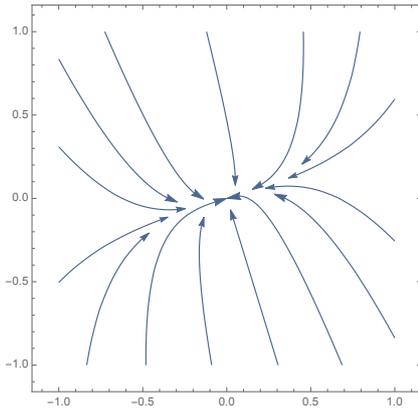
簡単のため係数行列  $A$  が対角化可能な場合を考える。この場合平衡点は明らかに  $\mathbf{y} = 0$  である。 $A$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2$ 、それぞれに属する固有ベクトルを  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  とすれば、方程式の一般解は

$$\mathbf{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{u}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{u}_2 \quad (2.3.9)$$

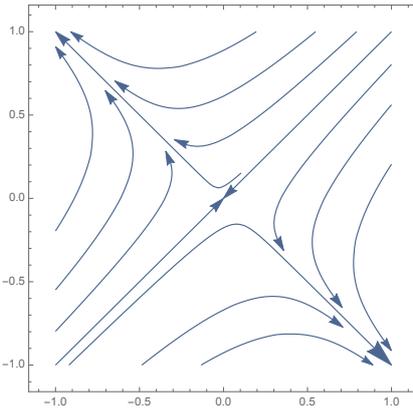
であり、固有値の値により平衡点  $\mathbf{y} = 0$  は以下のように分類できる。

- (a) 固有値が実数値で  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  のとき、 $\mathbf{y}(t) \rightarrow 0$  であり漸近安定。このような平衡点を「安定結節点」という。
- (b) 固有値が実数値で  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  のとき、 $\mathbf{y}(t) \rightarrow C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{u}_2$  に漸近し不安定。このような平衡点を「鞍点」という。
- (c) 固有値が実数値で  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  のとき、 $|\mathbf{y}(t)| \rightarrow \infty$  であり不安定。このような平衡点を「不安定結節点」という。
- (d) 固有値が複素数値で  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ,  $\alpha < 0$  のとき  $\mathbf{y}(t) \rightarrow 0$  であり漸近安定。このような平衡点を「渦状点」という。
- (e) 固有値が複素数値で  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$  のとき、 $\mathbf{y} = 0$  は安定。このような平衡点を「渦心点」という。
- (f) 固有値が複素数値で  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ,  $\alpha > 0$  のとき  $|\mathbf{y}(t)| \rightarrow \infty$  であり不安定。このような平衡点を「不安定渦状点」という。

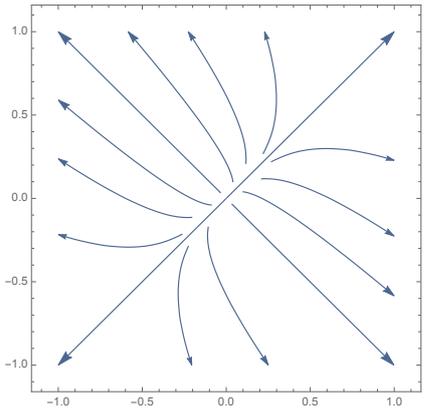
$xy$ -平面上で様々な初期値を始点に取った場合の解の流れを図示すれば、それぞれ以下のようなになる。



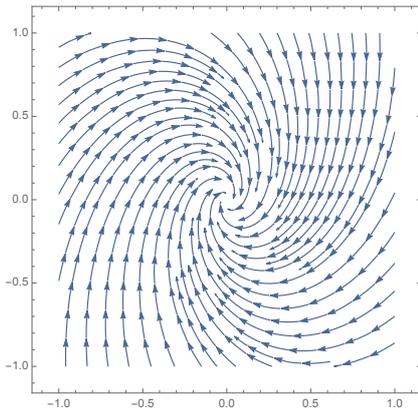
(a) 安定結節点



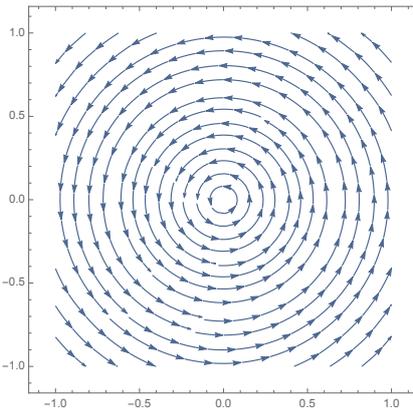
(b) 鞍点



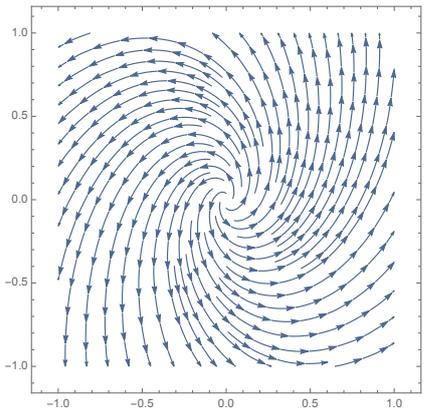
(c) 不安定結節点



(d) 渦状点



(e) 渦心点



(f) 不安定渦状点

なお、係数行列  $A$  の固有値が  $0$  を含んだり、あるいは対角化できない場合には別のパターンが現れる。

再び非線形連立方程式を考えよう。このような場合にも、平衡点の安定性はその近傍における「線形近似」で解析できることが多い。

**例：** 非線形方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy \\ \dot{y} = x - y^3 \end{cases} \quad (2.3.10)$$

を考えよう。この方程式の平衡点  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  は、 $xy = 1$ ,  $x = y^3$  で与えられるから、 $(x, y) = (1, 1)$  および  $(-1, -1)$  が平衡点である。それぞれの安定性を見ていこう。

(i)  $(x, y) = (1, 1)$  の安定性。平衡点の周りで従属変数を展開すれば

$$\begin{cases} x = 1 + u \\ y = 1 + v \end{cases}, \quad |u|, |v| \ll 1 \quad (2.3.11)$$

のようになり、 $u, v$  についての方程式は

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{u} = 1 - (1+u)(1+v) = -u - v - uv \simeq -u - v \\ \dot{y} = \dot{v} = (1+u) - (1+v)^3 = u - 3v - 3v^2 - v^3 \simeq u - 3v \end{cases} \quad (2.3.12)$$

のように線形方程式に近似できる。ここで  $u, v$  について 2 次以上の項は無視した。この線形方程式の係数行列は  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$  であるから、固有値を求めると  $|A - \lambda E| = (\lambda + 2)^2 = 0$  となり重解  $\lambda = -2 < 0$  となる。したがって、対角化は不可能であるが  $u, v \sim e^{-2t}$  ( $t$  の多項式)  $\rightarrow 0$  がわかり、漸近安定である。

(ii)  $(x, y) = (-1, -1)$  の安定性。同様に平衡点の周りで従属変数を展開すれば

$$\begin{cases} \dot{u} \simeq u + v \\ \dot{v} \simeq u - 3v \end{cases} \quad (2.3.13)$$

となり、係数行列の固有値は  $\lambda_{\pm} = -1 \pm \sqrt{5}$  であることがわかる。したがって、 $\lambda_- < 0 < \lambda_+$  であるから、鞍点である。

## 演習課題 14

演習 14.1 次の連立微分方程式の平衡点を全て求め、それらの安定性を判定せよ。

$$(1) \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y_1' = -5y_1 + 3y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 \end{cases}$$

演習 14.2 連立微分方程式

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + 3y_2 - y_3 - 4 \\ y_2' = -3y_1 - 2y_2 + 3y_3 + 1 \\ y_3' = -3y_1 + 3y_2 - 2y_3 + 1 \end{cases}$$

の平衡点を求め、安定性を判定せよ。