

Schwarzschild時空における水星の近日点移動

4sp00102 秋沢 以子 非線形物理学研究室

1. 序論

本研究の目的は、球対称な星の外側の真空な時空の幾何学である *Schwarzschild* 幾何学を用い、水星軌道 1 公転周期当たりの近日点のずれが、

$$\Delta\phi = 43''/\text{世紀}$$

であることを示すことである。

近日点移動を導く上で、まず幾何学の様々な概念と物理世界での重力の関係を学ばねばならない。また、*Newton* の二つの法則

$$1) F = ma$$

$$2) \nabla^2\phi = 4\pi G\rho$$

に対応する一般相対論的な法則を導き、物理的対象である粒子などが曲がった時空でどのようにふるまうか、時空の曲がり具合（曲率）が時空内の物体によってどのように決められ、つくられるかを導出し、重力場における粒子の運動方程式を導き、軌道を決定する。

実際に測定された近日点移動と、*Einstein* が導いた近日点移動が正確に一致することで、一般相対論の正しさが証明されている。

2. Schwarzschild 幾何学

Schwarzschild 時空の線要素は、

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (1)$$

$$(d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

である。メトリックが時間によらなければ、運動量 P_0 は軌道上で一定であり、それに関連した量を次のように定義する。

$$\text{粒子} \quad \tilde{E} \equiv -\frac{P_0}{m} \quad (2)$$

ここで m は粒子の静止質量を表している。メトリックは対称軸まわりの角 ϕ によらないことか

ら P_ϕ は一定となる。それに付随した量、角運動量 L を次のように定義する。

$$\tilde{L} \equiv \frac{P_\phi}{m} \quad (3)$$

これらから、運動量に対する条件式

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \quad (4)$$

が導かれる。

3. 近日点移動

相対論的な粒子の軌道式は (4) から、

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2 - (1 - 2Mu)(1 + \tilde{L}^2u^2)}{\tilde{L}^2} \quad (5)$$

$$(u = \frac{1}{r})$$

である。円からのずれ y を $y = u - \frac{M}{\tilde{L}^2}$ と定義し、計算すると、

$$y = y_0 + A \sin(k\phi + B) \quad (6)$$

(定数を、 $k = (1 - \frac{6M^2}{\tilde{L}^2})^2$ 、 $y_0 = \frac{3M^3}{k^2\tilde{L}^4}$ 、

$A = \frac{1}{k}[\frac{\tilde{E}^2 + \frac{M^2}{\tilde{L}^2} - 1}{\tilde{L}^2} + \frac{2M^4}{\tilde{L}^6} + y_0^2]^{\frac{1}{2}}$ と定義。) となる。

一つの軌道から次の軌道までの近日点移動は

$$\Delta\phi = \frac{6\pi M^2}{\tilde{L}^2} \quad [\text{rad}/\text{軌道}] \quad (7)$$

で、非相対論的な星のまわりの軌道を考えるため、次のように近似する。

$$\tilde{L}^2 = \frac{Mr}{1 - \frac{3M}{r}} \approx Mr \quad (8)$$

これより、

$$(\Delta\phi)_{\text{Mercury}} = 43''/\text{世紀} \quad (9)$$

が導かれる。