

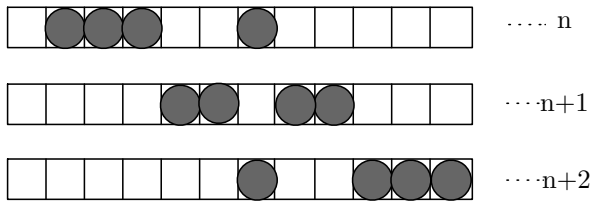
ソリトン方程式と超離散

4SP00134 大道昌広 非線形物理学研究室

1 箱玉系とは

箱玉系とはなんだろうか？箱玉系は玉の動きがソリトンと類似した動きをするものである。数学的な観点から言えば、超離散化されたソリトンのモデルである。ソリトン波とは、孤立波つまり粒子のような性質を持つ波であり、波の大きさに比例した速度を持つ波である。

2 箱玉系の原理



箱玉系とは、上の図のように以下の手順で繰り返し操作されるものとする。一巡すればまた時刻を変え操作する。

- ルールとしては玉を移し変える運搬人というものを考える。この運搬者は左から右に移動する。この人は任意の時刻 N において玉を持ち運び移動させる役割を果たす。
- 移動の対象となる箱が空である場合、手持ちがあれば箱に入れ、手持ちがなければ何もしない。また箱に玉がある場合はこれを運搬人が拾う。

また、箱玉系は時刻 n , 箱の位置を表す番号を j , 時刻 n 番目の箱に入っている箱の個数を B_j^n と表す。箱の個数は 0 か 1 である。すると、時間発展則は

$$B_j^{n+1} = \min(1 - B_j^n, \sum_{i=-\infty}^{j-1} (B_i^n - B_i^{n+1})) \quad (1)$$

$1 - B_j^{n+1}$ は時刻 n での箱 j の空きスペースで、 $\sum_{i=-\infty}^{j-1} (B_i^n - B_i^{n+1})$ は運搬人が時刻 n で箱 j の位

置に来た時の手持ちの玉の個数である。空きスペースと運搬人が持っている個数の最小値を $n + 1$ の時の玉の個数を表す。

3 ロトカーボルテラ (LV) 方程式の双線形化

LV 方程式の由来は生物の食物連鎖からきている。この方程式はソリトン解を導く式の一つである。

$$\frac{du_j}{dt} = u_j(u_{j-1} - u_{j+1}) \quad (2)$$

この式の双線形化の計算の際に広田の演算子を使う。広田の演算子は以下のように記述される。この演算子は、非線形方程式を解くために大変重要な式である。

$$D_x a(x)b(x) = \left(\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx'}\right)a(x)b(x')|_{x=x'} \quad (3)$$

4 LV 方程式の超離散

LV 方程式は前述したようにソリトン解を導くための式の一つである。またこの式を時刻離散化し差分 LV 方程式を求める事ができる。

$$\frac{1}{\delta}(u_j^{n+1} - u_j^n) = u_j^n u_{j-1}^n - u_j^{n+1} u_{j+1}^{n+1} \quad (4)$$

またこの式に変数変換をし、超離散化をしてやれば離散 LV 方程式が求まる。以下にこの方程式を記述する。

$$U_j^{n+1} - U_j^n = \max(0, U_{j-1}^n - 1) - \max(0, U_{j+1}^{n+1} - 1) \quad (5)$$

この式は前述した箱玉系の時間発展式からも導く事ができる。よって、ソリトン方程式 (LV 方程式) と箱玉系 (離散方程式) が結びつく事がわかる。