# リュカテストによるメルセンヌ素数の発見法


## 非線形物理学　4sp01150 宮健二


### 序論

17 世紀の前半、数学、科学が最も進んでいたパリにあって、神父メルセンヌは、毎週一流の数学者、科学者を集めて最新の情報を交換し、また広くヨーロッパの数学者科学者たちと手紙を交わしていました。まだ科学アカデミーもなく学術雑誌もない時代に、メルセンヌと手紙を交換するのが最も早く、最も確実な新しい発見の発表方法だったのです。直接、間接手紙を交換したひとのなかには、フェルマやデカルト、ガリレオ等も含まれていました。

このメルセンヌの名を不朽のものにしているのは、次に示すメルセンヌ素数のおかげです。

### メルセンヌ素数

自分自身の数と 1 以外では割り切れない数を素数という。また、$M = 2^n - 1$ と表される数をメルセンヌ数と言い、そのうちで素数になるものをメルセンヌ素数と呼び、簡単な考察から $M_n$ が素数になるのは $n$ が素数の時に限られることが分かります。

このメルセンヌ素数の判定法としてリュカテストが知られています。

### リュカテスト

初項 $L_1 = 1$ 第 2 項 $L_2 = 3$ として

$F_p = L_{p-1} + L_{p-2}$

と表される数列

$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, , , ,$

をリュカ数と言いフィボナッチ数との間に非常に沢山の相互関係があることが知られています。

$p$ をある素数とした時、$S_{p-1} = L_{2^p-1}$ として、$S_{p-1}$ を $M_p$ が割り切れるならば $M_p$ は素数であることが分かっています。

例えば

$p = 5$ の時 $S_{p-1} = 37634$ は $M_p = 31$ で割り切れるので 31 は素数。

$p = 6$ の時 $S_{p-1} = 1416317954$ は $M_p = 63$ で割り切れないので 63 は合成数となります。

その性質を利用してメルセンヌ素数を求めるプログラムを製作しました。

### フィボナッチ数

リュカテストの証明は次に示すフィボナッチ数とリュカ数を使い行われます。

初項 $F_1 = 1$ 第 2 項 $F_2 = 1$ として

$F_p = F_{p-1} + F_{p-2}$

と表される数列

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, , , ,$

をフィボナッチ数と言い花びらの枚数などが、この数になることが知られています。

### リュカテストの歴史

$p = 4j + 3$ の時の証明はリュカ自身により 1878 年に証明されました。リュカはリュカテストを考案したことにより $M_{127} = 170141183460469231731687303715884105727$ という大きな数が素数であることを発見しました。これは手計算で発見された最も大きなメルセンヌ素数です。また現在ではコンピュータを使って $M_n = 2^{24036583} - 1$ と言う巨大なメルセンヌ素数が発見されています。

### 参考文献


フィボナッチ数の小宇宙

中村 滋 (日本評論社)