場の量子論におけるカシミール効果

非線形物理学研究室　　01136　　二井 祥仁

1. 序論

カシミール効果とは、真空の空間に平行な金属板を置くと、微弱な力によってそれらが引き合うというもので、1948 年にヘンドリック・カシミール (Hendric Brugt Gerhard Casimir) によって提唱され、1997 年にラモロー (S.K.Lamoreaux) により実験的に確認された現象である。これは、金属板を置くことによって電磁場の真空エネルギー固有値が量子化された結果起こるものであり、量子場の影響が巨視的に現れた現象と説明できる。

2. 量子場の基底エネルギー

真空中の電磁場は Maxwell 方程式によって記述される。よって、ゲージポテンシャル $A_\mu(x)$ をフーリエ級数展開した

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3 2k_0}$$

$$\times \sum_{\lambda=1}^{2} \varepsilon_\mu^\lambda(k)[a(k)^{(\lambda)}e^{-ikx} + a^{(\lambda)\dagger}(k)e^{ikx}]$$

から、ハミルトニアン H は

$$H = \sum_\lambda \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3 2k_0}\frac{k_0}{2}$$

$$\times[a(k)^{(\lambda)}a^{(\lambda)\dagger}(k) + a^{(\lambda)\dagger}(k)a(k)^{(\lambda)}]$$

と表せる。
このとき真空の基底エネルギーの期待値は

$$E_0 =< 0|\hat{H}|0 >$$

であるが、これは無限個の基底状態にある調和振動子の基底エネルギーの総和をとることに等しいので

$$E_0 \propto \int \omega_k dx \qquad (k_0 = \omega_k)$$

となる。

3. 金属板による量子化

3 次元ユークリッド空間内で $x_1 = 0, x_1 = a$ に置かれた平行な平面を考える。この平面で囲まれる領域を D として、平面による境界が存在する場合の状態を D_b と表すと、カシミールエネルギーを次のように定義できる。

$$E_{Casimir}[D] = E_0[D_b] - E_0[D]$$

このとき、領域 D_b の場は平面の作る境界によって量子化されているため、連続値であった k は可算な値をとる。よって真空のエネルギー期待値 $E_0[D_b]$ は

$$E_0[D_b] \propto \sum_k^\infty \omega_k$$

という無限和に変わり、

$$\int \omega_k dx \quad \neq \quad \sum_k^\infty \omega_k$$

なので $E_{Casimir}[D] \neq 0$ となり、このエネルギー差によって、平面間すなわち金属板間に力が働くこととなる。

4. ζ 関数による無限の繰り込み

上記のカシミールエネルギーの計算では、各項が無限大発散するため、有限値を得るためには ζ 関数を用いて繰り込みをおこなう必要がある。この ζ 関数とは「リーマンの ζ 関数」として定義されているもので、オイラー積により

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$$

と表せる。
ζ 関数は 全複素平面において 1 で 1 位の極を持つ以外は極を持たず、有理型関数として解析接続され $Re(s) > 1$ の複素半平面においては正則であるという特徴的な性質を持っている。$E_{Casimir}[D]$ は本質的には

$$\sum_{n=1}^\infty \omega_k = \sum_{n=1}^\infty n^3$$

と書けるため、ζ 関数の定義からこれは $\zeta(-3)$ を求めることに帰着できる。

これにより、得られる単位面積当たりのカシミールエネルギーは

$$E^0_{Casimir}(a) = -\frac{\pi^2}{720}\frac{1}{a^3}$$

となり、カシミール力は

$$F_{Casimir}(a) = -\frac{\partial}{\partial a}E^0_{Casimir}(a) = -\frac{\pi^2}{240}\frac{1}{a^4}$$

となる。

参考文献:

1) QUANTUM FIELD THEORY　(LEWISH.RYDER)
2) Quantum Field Theory
(CLAUDE ITZYKSON ・ JEAN-BERNARD ZUBER)
3) 絶対カシミール元　(黒川 信重・若山正人)