二次元イジング模型の連続極限

非線形物理学研究室 SP　９８１１９ 酒井 博

I　序論

物理現象を理解するには、まず模型をたてて比熱などの物理量を得ることになるのだが、厳密に解ける模型というのは数少なく Ising 模型はその数少ない模型のうちの１つである．そのイジング模型が解けるとは具体的にどういった事なのか、またこの格子模型の連続極限をとる、すなわち格子の網目を細かくしていくと格子上の演算子は場の演算子として Dirac 方程式を満たすということをここで考察する．

II　２次元イジング模型

まず一般に系が与えられたとき物理量や振る舞いを知る第一歩として分配関数（すべてのとりうる状態数）を記述することから始める．

$$Z_N = \sum_s e^{-\beta E(s)} \tag{1}$$

s はスピンの配置で和はそのスピンの配置についての和である．$E(s)$ は相互作用のエネルギー β は温度の逆数である．まず１次元のイジング模型において $s=\pm1$ を成分のラベルとする行列 V

$$V = (e^{Kss'})_{s,s'=\pm1} = \begin{pmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{pmatrix} \tag{2}$$

を定義すると分配関数は

$$Z_N = \sum_{s_1,\ldots,s_N=\pm1} V_{s_1s_2}\cdots V_{s_3s_2}V_{s_2s_1} \tag{3}$$

と行列の積で書ける．２次元においてもこれが適用できて１つの行の転送行列 V_1 とその行間の転送行列 V_2 で書け次の様になる．

$$\begin{aligned} V_1 &= \exp iK_1(q_1p_2 + \cdots - \epsilon q_M p_1) && (4)\\ V_2 &= (2s_2)\exp iK_2^*(p_1q_1 + \cdots + p_Mq_M) && (5)\\ V &= V_1^{-1/2}(V_1V_2)V_1^{1/2} && (6)\end{aligned}$$

またスピン演算子を $\sigma_{mn} = V^{-n}\sigma_m^z V^n$ で定義して以下でその１点関数の記述を考える．なおそれぞれの演算子は次のように定義される．

$$\begin{aligned} \sigma_m^\alpha &= 1\otimes\cdots\otimes \overbrace{\sigma^\alpha}^{m} \otimes\cdots\otimes 1 && (7)\\ & \qquad (\alpha = x,y,x) \\ p_m &= \sigma_1^x\cdots\sigma_{m-1}^x\sigma_m^z && (8)\\ q_m &= \sigma_1^x\cdots\sigma_{m-1}^x\sigma_m^y && (9)\end{aligned}$$

ここで p,q はフェルミオンの性質を持ち、スピン演算子の２点関数はフェルミオン演算子の真空期待値を計算することにより得られる．２点関数が与えられれば Toeplitz 行列の極限で１点関数が得られる．$\langle\sigma\rangle$ は自発磁化であり遠く離れたスピンがそろう傾向，つまり長距離にわたる秩序が出現してるかどうかの目安を与える．ここでは σ と T_c に双対な無秩序の度合いを測る disorder 変数 μ という演算子で議論しても同じなので以下これで議論する $<\mu>$ の１点関数は

$$\langle\bar\mu\rangle \sim \left(1-\sinh^4\frac{2E}{k_BT}\right)^{1/8} \tag{10}$$

この様に厳密解が具体的に計算でき、有限温度において相転移が起きることが理解できるのである．

III　連続極限

上で定めた格子上のフェルミオン演算子は、格子間隔を無限小にする極限において次の Dirac 方程式を満たすことが分かる。

ここでは連続極限をとるために生成消滅演算子の連続極限を定めて p,q 演算子の極限を書くと

$$\begin{aligned} b^\dagger(p) &= \lim_{\epsilon\to0}\sqrt{\epsilon}\hat\psi^\dagger(\epsilon p) && (11)\\ b(p) &= \lim_{\epsilon\to0}\sqrt{\epsilon}\hat\psi(\epsilon p) && (12)\end{aligned}$$

この様に極限を含めた演算子でフェルミオン演算子つまり生成消滅演算子を書きまたローレンツ不変な座標 u で演算子を書換えると

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} du = \begin{pmatrix} \sqrt{iu} \\ \sqrt{iu}^{-1} \end{pmatrix}\tilde\psi(u,x), \tag{13}$$

$$\tilde\psi(u,x) = e^{-im(x^-u+x^+u^{-1})}\tilde\psi(u). \tag{14}$$

以上２式は２次元の中性自由フェルミ場としてよく知られた場の演算子であり次の Dirac の方程式を満たす.

$$\begin{pmatrix} m & \partial_- \\ -\partial_+ & m \end{pmatrix}\psi(x) = 0, \tag{15}$$

$$\left(\partial_{\pm1} = \frac{\partial}{\partial x^0} \pm \frac{\partial}{\partial x^1}\right)$$

以上の事から結論として２次元イジング模型の格子点上に定義されたフェルミオン演算子は格子間隔を無限小にする極限において Dirac 方程式を満たす。