Virasoro 代数と Kac 行列式

4sp00132　田中 大士　　非線形物理学研究室

1. 序論

Virasoro 代数とは二次元での共形不変性を表現するための代数で、無限次元 Lie 代数であり、種々の臨界現象の解析において重要な役割を果たす。本研究では物理現象を記述するための Virasoro 代数の Unitary 表現の構成に必要な、Kac の行列式の紹介を行う。

2.Virasoro 代数

Virasoro 代数は、共形変換に対する理論の振る舞いを記述する代数である。共形変換とは、長さを変えても角度は保つ様な変換のことである。

$$w = z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n z^{n+1} \tag{1}$$

変換 $z \mapsto w = f(z)$ を引き起こす生成子を L_n とすると、L_n は関数 $\phi(z)$ に対して $L_n\phi(z) = -(m-n)z^{n+1}(\frac{d}{dz})\phi(z)$ のように働き、その交換子は

$$\begin{aligned}[L_n, L_m] &= [z^{n+1}(\frac{d}{dz}), z^{m+1}(\frac{d}{dz})] \\ &= (m-n)z^{m+n+1}\frac{d}{dz} = (n-m)L_{n+m}\end{aligned} \tag{2}$$

となる。

ここで a_k を無限調和振動子のオペレーターとする。a_k は線形な振動子で連結された

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{N}(q_i - q_{i+1})^2 \tag{3}$$

$$(q_{N+1} = q_1)$$

という模型の q, p から得られる Q_k, P_k、

$$Q_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}k_i} q_i \tag{4}$$

$$P_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}k_i} p_i \tag{5}$$

$$(k = -M, -M+1, \cdots, M)$$

によって

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_{-k} + \sqrt{-1}\omega(k)Q_{-k}) \tag{6}$$

と書くことが出来る。a_k は量子化によって $[a_k, a_n] = k\delta_{k+n,0}$ のような交換関係をもつ。

正規順序化を用いて Virasoro 代数の生成子を次のように定める。

$$L_k = \frac{1}{2}\sum_{k\in Z} : a_{n-k}a_k : \tag{7}$$

この L_n は次のような交換関係を満足する。

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{n(n^2-1)}{12}\delta_{n+m,0} \tag{8}$$

演算子 L_n が成すこのような代数のことを Virasoro 代数とよぶ。

3. 最高ウエイト表現

調和振動子の状態空間の構成と同様に、Virasoro 代数に対してもこれに類似の表現、「最高ウエイト表現」を考える。

$$L_n|h\rangle = 0 \quad (n \geq 1) \tag{9}$$

$$L_0|h\rangle = h|h\rangle \tag{10}$$

を満たすベクトル $|h\rangle$ を最高ウエイト h を持つ最高ウエイトベクトルと呼び、これに負のモード $L_n(n \leq -1)$ を次々に掛けて得られる状態で作られる空間

$$M(h) = C[L_{-1}, L_{-2}, \cdots]|h\rangle \tag{11}$$

を最高ウエイト表現と定める。

4. 特異ベクトルと Kac 行列式

最高ウエイト表現 $M(h)$ において、つぎのような特別な振る舞いをするベクトルが生じることがある。
$M(h)$ のベクトル $|\chi\rangle$ で条件

$$L_0|\chi\rangle = (k+h)|\chi\rangle \tag{12}$$

$$L_n|\chi\rangle = 0 \quad (n \geq 1) \tag{13}$$

つまり、$|\chi\rangle$ とは正モード L_n、つまり消滅演算子によって消されるベクトルである。このようなベクトルを、次数 k の特異ベクトルと呼ぶ。特異ベクトルが存在すると、$M(h)$ と $M^*(h)$ のノルムに退化が生じはじめる。
特異ベクトルを探すのに必要な式が Kac 行列式である。Kac 行列式は次のような式である。

$$\det{}_N = \prod_{|\lambda|=N} 2^{l(\lambda)} \cdot z_\lambda \times \prod_{r,s\geq 1, rs\leq N} (h - h_{r,s})^{P(N-rs)} \tag{14}$$